

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

M. Bruno MORANDO

PREMIÈRE THÈSE

Théorie planétaire semi-numérique
sans introduction de termes séculaires. Application à Vesta

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Les invariants intégraux. Application à la mécanique céleste

Soutenue le 19 décembre 1966 devant la Commission d'Examen

MM. JANET

Président

DANJON

THIRY

KOVALEVSKY

}

Examineurs

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

M. Bruno MORANDO

PREMIÈRE THÈSE

Théorie planétaire semi-numérique
sans introduction de termes séculaires. Application à Vesta

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Les invariants intégraux. Application à la mécanique céleste

Soutenue le 19 décembre 1966 devant la Commission d'Examen

MM. JANET

Président

DANJON

THIRY

KOVALEVSKY

}

Examineurs

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen

M. ZAMANSKY

Professeurs

MM. BRELOT	T Analyse supérieure	OLMER	T énergétique générale	AUBOIN	T géologie
PRENANT	T anatomie et histologie comparée	ROUAULT	T électricité (Orsay)	Mme BENOIT-GUEUTAL	T physique nucléaire et radioactivité (Orsay)
GRASSE	T évolution des êtres organisés	GAUTHIER	T mécanique appliquée	MM. BOUGIS	Biologie marine Villefranche/mer
PREVOST	T chimie organique	BARCHIEWITZ	T chimie physique	BRUHAT	T math. MPC
WYART	T minéralo. & cristal	BROSSEL	T physique atomique	BRUNN	T géologie historique Orsay
TEISSIER	T zoologie	BUSER	T physiologie comparée	CHABBAL	T physique MGP (Orsay)
MANGENOT	T biologie végé. (Orsay)	CAMUS	T physio-végé.	DEHEUVELS	T math. propé.
AUGER	T physique quantique et relativité	CASTANG	T physique II thermo- (Orsay)	D'ESPAGNAT	T physique théorique (Orsay)
MONNIER	T physiologie générale	CURIEN	T minéralo. & cristal.	FIRON	T géologie SPCN
PIVETEAU	T Paléontologie	MOYSE	T physio-végé. (Orsay)	Mme GANS	T génétique
ROCARD	T physique ENS	Mme CHARNIAUX-	T évolution des êtres or-	MM. GENEVES	biologie végétale PCB
CARTAN	T mathématiques ENS	COTTON	ganisés	GUILBERT	physique CUS Orléans
LAFFITTE	T chimie générale	MM. POSSOMPES	T zoologie	HUPE	T pétrographie
N...	T géométrie supérieure	PULLMANN	T chimie quantique	HOLLANDE	T biolo. géné.
COULOMB	T physique du globe	TEILLAC	T physique nuc. et radioac-	LIONS	T analyse numérique
Mie COUSIN	T biologie animale SPCN		tivité (Orsay)	MAITTE	T chimie PCB
MM. CHRETIEN	T chimie minérale	TONNELAT	T bio, physico. chim. (Orsay)	MEYER	physique propé.
BOCQUET	T zoologie	VILLE	T économétrie	NICOLAS	géologie appliquée
KASTLER	T physique ENS	WILLEMART	T chimie PCB	PANIGEL	biologie générale
EPHRUSSI	T génétique	DODE	T chimie (Orsay)	RAVIER	pétrographie
RIVIERE	T géologie SPCN & sédiment. (Orsay)	FREYMAN	T recherches physiques	ROSEAU	T méca.-théorie des fluides
CAUTHERET	T biologie végétale PCB	GUINOCHET	T biolo. végé. SPCN (Orsay)	ROUBINE	électronique
LUCAS R.	T recherches physiques	ROLLET	T chimie minérale	SILBER	T chimie PCB
THOMAS A.	T biologie cellulaire	Mie JOSIEN	T chimie SPCN	UEBERSFELD	T électronique
ARNULF	T optique appliquée	MM. CHEVALLEY	T géométrie algébrique et	YVON	T théories physiques
MORAND	T physique enseignement	ARNOULT	théorie des groupes	HERVE	T mathématiques
SOLEILLET	T physique PCB	CHAPELLE	T électronique Orsay	NERON	T math. MPC (Orsay)
FORTIER	T Mécanique exp. des fluides	DELANGE	T physique I (Orsay)	Mme PECKER WIMEL	T astrophysique
DRACH	T zoologie	DENY	T mathématiques I (Orsay)	MM. BALKANSKY	physique MPC
QUENY	T météo. & dynamique atmos.	GERMAIN	T mathé. géné. (Orsay)	LE CORRE	T électricité
GALLIEN	T embryologie		T mécanique théorique des	DELICROIX	physique théorique (Orsay)
EICHORN	T botanique	LUCAS	fluides	GOURDIN	physique théorique (Orsay) des hautes énergies
DE CUGNAC	T biologie végétale SPCN	ALLARD	T géologie	LEHMANN	T phys.-exp. des hautes énergies
Mie CAUCHOIS	T chimie physique	BERTHELOT	T chimie physique	NATAF	T physique nucléaire et radioactivité (Orsay)
MM. THELLIER	T physique du globe	BRICARD	T physique des particules	ECHALIER	biologie animale PCB
L'HERITIER	T biologie générale Orsay		fondamentales (Orsay)	BARRAUD	physiolo.-cellulaire
GRIVET	T radioélectricité Orsay	Mme ALBE FESSARD	T météo. et physique de	LORET	physiologie végé.-Orsay
PONCIN	T mécanique générale	MM. FRIEDEL	l'atmosphère	DARS	géologie structurale & géolo.-appli.
DU BREIL	T arith. & théorie des nombres	JULIA	T psycho-physio.	CAMEFORT	T botanique (agréation)
QUET	T chimie organique		T physique des solides (Orsay)	VICHNIEWSKY	T mécanique industrielle
CAGNIARD	T géophysique appliquée	LENDER	T Etudes des moléculaires	BLAUQUET	électronique (Orsay)
CHAMPETIER	T chimie macromoléculaire	MAGAT	complexes	ARNOUS	T physique théorique
CUVILLIER	T micropaléontologie		T biologie animale SPCN Orsay	TATIBOUET	chimie (CSU Orléans)
JUNG	T géologie	Mie QUINTIN	T physico-chimie des radio-	MALLIAVIN	T math. propé. (Orsay)
TRILLAT	T microscopie et diffract. élec.	MM. MONOD	éléments	GAUDEMAR	chimie propé.
WIEMANN	T chimie organ. & structu.	BENOIT	T électrochimie	PEREZ Y JORBA	physique Exp. des Hautes énergies (Orsay)
JACQUINOT	T spectroscopie et physique	DE POSSEL	T chimie du métabolisme	DAVID	T chimie (agréation Orsay)
VASSY	céleste (Orsay)	CHARLOT	T physio.-animale Orsay	BROUSSE	T mécanique théorique
DESTOUCHES	T physique de l'atmosphère	LEMEE	T analyse numérique	ROSCHE	T astronomie
AMIEL	T chimie physique	GUERIN	T chimie analytique	GUY	T physique expérimentale
HOCART	T minéral. & cristal.	CHATELET	T écologie végétale Orsay	LAZARD	math MPC
J.P. MATHIEU	T physique optique	JEAN	T chimie MPC Orsay	MOREL Pierre	physique MPC
COUTEAUX	T cytologie	MATTIER	T chimie PCB	ARSAC	programmation
MAY	T zoologie	BERGERARD	T physio.-nucléaire Orsay	LEFEBVRE	chimie MPC
CHOQUET	T théorie des fonctions et	BERTIN	T physique SPCN	CHAPEVILLE	biochimie
FELDMANN	topologie	BOUSSIÈRES	T zoologie Orsay	BENOIT	physique CPEM
GUNIER	T biologie végétale marine	Mme COUTURE	T électronique Orsay	RIO	chimie CPEM
JOST	T physique des solides (Orsay)	MM. ELLEMBERGER	T radiochimie	JAUZEN	géologie ENS
FORTET	T physiologie comparée		T thermo. et méca.-physique	PREVOST Georges	BV CPEM
SCHWARTZ	T calcul des probabilités et phy-	FRANC	T géologie des grandes régions	FAVARD F.	BA CPEM
CHOUARD	sique mathématiques	SCHNELL	du globe (Orsay)	VILKAS	chimie CPEM
MALAVARD	T Calcul dif. & Intégral	STLKOWSKI	T biologie animale PCB	Mie FICINI	chimie CPEM
NORMANT	T physiologie végétale	ACHER	T botanique tropicale	MM. LEQUEUX	astronomie
BENARD	T aviation (technique aéron.)	BAUDON	T physiologie végétale	COHEN I	physique MPC
DUGUE	T synthèse organique	BEAUMONT	T chimie biologique	TAVERNIER	physique CPEM
SOULAIRAC	T chimie minérale	BLAMONT	T biologie animale PCB	Mme ROIZEN	physique CPEM
ULRICH	T botanique ENS	BOUREAU	T biologie animale SPCN	MM. DURAND M.	BA SPCN
MARECHAL	T statistique mathématiques	CURIE D.	T géophysique ionosphère	PASCAUD	physiologie
KIRRMANN	T Psychophysique	DURAND DELGA	T botanique	Mme PETIT	BA CPEM
CHADEFAUD	T Physiologie végé. appli.	FREON	T physique MGP	MM. BROUSSE	géologie orsay
Mie LE BRETON	T Optique théo. & appli.	HELLER	T géologie	CAGNIAC	physique agréation Orsay
MM. LELONG	T théories chimiques	TORTRAT	T chimie organique Orsay	LEBERRE	zoologie (Orsay)
DEVILLERS	T botanique	CAILLEUX	T physiologie végétale	SCHEFFER	microbiologie (Orsay)
EHRESMANN	T Physio de la nutrition	MAGNAN	T calcul des probabilités	DE GENNES	physique des solides (Orsay)
FRANCON	T appli. de l'ana à la géom.	DAUDEL	T géologie SPCN	RIOU	physique nuclé.-exp. Orsay
GLANGEAUD	T anat. & histo. compa.		physique électricité	CLAUSER	chimie biolo. Orsay
DODEMENT	T physiologie algébrique	Mme FOURCROY	T mécanique ondulatoire appli.	CHEVALIER	physio.-animale Orsay
PISOT	T physique SPCN	Mme CHOQUET BRUHAT	À la chimie théo. & à la	JAN COVICI	physique atomique Orsay
ROCH	T géog. phys. géol.		phy-nucléaire	FALK-VAIRANT	physique nucléaire Orsay
SCHATZMANN	T géométriques MGR	Mie VEIL	biologie végétale SPCN	FETIZON	chimie propé. Orsay
TERMIER	T technique math. de la phys.	MM. LWOFF	mécanique analytique et	CERF	mathématiques Orsay
ZAMANSKY	T géologie	SIESTRUNCK	méca.-céleste	LURCAT	physique
LENNUEY	T astrophysique	LACOMBE	T physiologie générale	RIGAUDY	chimie S.P.C.N.
RIZET	T géologie générale	BROCHARD	T microbiologie	SIGWALT	chimie S.P.C.N.
ROUTIER	T géologie MGP	CABANNES	T méca. phys. & expérimentale	FOURNET	électrécité générale
Mme TONNELAT	T génétique Orsay	LESIEUR	T métallurgie des métaux	COLLONQUES	chimie C.P.E.N.
MM. DIXMIE	T géologie appliquée	MAZET	nucléaires (Orsay)	DUBERT	biochimie
SOUCHAY	T physique théorique	CAIRE	T physique PCB (Orsay)	LAVEROL	biologie physico.-chimique
AIGRAIN	T mathématiques MPC	COMOLET	T mécanique générale	MOREL F.	physiologie comparée
BRUSSET	T chimie générale	CORABOEUF	T math. I (Orsay)	TALBOT	génétique chimique
M. LEVY	T électrotechn. géné.	DELLOUE	T méca.-géné. (Orsay)	Mme NOUGAREDE	botanique
Mme CHALK	T chimie systémique	GORENFLOT	géog. phys. et géo dynami	MM. FRANCOIS	zoologie
Mme HUREL PY	T physique théorique des	HOULLON	méca.-des fluides	IVANOFF	océanographie physique
MM. PANNETIER	hautes énergies (Orsay)	JULIEN J.	T physio.-animale (Orsay)	CADIOT	chimie organique
BRUN	T chimie biologique	MALGRANGE	T physique de l'exosphère	BARUCH	physique propédeutique
LEDERER	T biologie végétale PCB	OLIVIER	botanique II (Orsay)	NOZIERES	physique générale
Mme DUBREIL	T chimie générale	NOZERAN	chimie SPCN (Orsay)	BOK	physique propédeutique
Mme LELONG	T méca. des fluides I	BLANC-LAPIERRE	T technique mathé. de la phys. Ors.	SLONIMSKI	génétique
M. BELLAIR	T chimie biologique (Orsay)	CHEVAUGON	Antropologie	KRASNER	T mathématiques
MM. COTTE	T math. II ENS	KAHANE	T botanique II (Orsay)	BENZECRI	T statistiques
DUBOIS J.E.	T géologie SPCN	SAMUEL	T physique ENS (Orsay)	VINH MAU	physique M. G. P.
LAMOTTE	T géologie appliquée	KOURGANOFF	T botanique (Orsay)	DUQUESNES	physique C. P. EM.
MICHEL A.	T physique électricité	THIERY	T mathématiques (Orsay)	SCHUTZENBERGER	programmation
	T chimie organique	ABELES	T math ENS féminines	TREMILLON	chimie MPC
	T zoologie ENS	AMAT	T astronomie (Orsay)	FAYARD	chimie MPC
	T chimie minérale Orsay		T méca.-céleste	BUVET	chimie CPEM
			T physique SPCN	AUTHIER	physique MPC
			T physique PCB	PICINBONO	physique CPEM
				BONNEFILLE	électrotechnique
				Mme PUISEUX DAO	biologie végétale

le secrétaire général

R. POULAIN

A

Monsieur André DANJON
Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes
Directeur honoraire de l'Observatoire de PARIS
Professeur honoraire à la Sorbonne

et

A

Monsieur Jean KOVALEVSKY
Membre correspondant du Bureau des Longitudes
Astronome titulaire au Bureau des Longitudes.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41533912_0019

Résumé : On cherche à obtenir dans les théories planétaires une solution telle que des termes séculaires ne figurent pas dans les éléments métriques. (Demi-grand axe, excentricité, inclinaison).

On a réussi à obtenir une telle solution dans le problème simplifié de la théorie au premier ordre de Vesta perturbée par Jupiter. A la place des termes séculaires on voit apparaître des termes périodiques dont les périodes sont de l'ordre de grandeur des temps de révolution du nœud et du périhélie.

La méthode entraîne un traitement très important de séries trigonométriques à 2 et 4 arguments avec coefficients numériques. On a fait appel à un ordinateur électronique.

Abstract : We endeavour to obtain in planetary theories a solution such that no secular terms appear in the semi major axis, the excentricity and the inclination.

We did get such a solution in the more simple problem of the first order theory of Vesta disturbed by Jupiter. Instead of secular terms we find periodic terms the periods of which are of the same order of magnitude that the times of revolution of the node and the perihelion.

The method leads to a great amount of computing on trigonometric series with 2 and 4 arguments and numerical coefficients. Of course we had to use an electronic computer.

Zusammenfassung : In Planetentheorien wird eine Lösung gesucht, in welche die Säkularen Glieder auf die metrischen Bestandteile (Semi-Grosse Achse, Exzentrizität, Neigung) nicht stehen.

In dem einfachen Problem der ersten Ordnung-Theorie der durch Jupiter zerstörte Vesta wird eine solche Lösung erlangt.

Anstatt Säkularen Glieder, erscheinen periodischen Glieder deren Perioden der zeitraumgrösse des Knoten und der Sonnennähe sind. Die Methode erfordert eine sehr wichtige Behandlung aus trigonometrischen Reihen von zwei und vier Argumenten mit numerischen Koeffizienten. Eine elektronische Rechenanlage wird benutzt.

Резюме : Автор пытается получить в планетных теориях такое решение, в котором вековые члены не фигурировали бы в большой полуоси, эксцентрисити и наклонности.

Ему удалось получить такое решение для упрощенной задачи теории первого порядка относительно Весты, возмущенной Юпитером. Вместо вековых членов появляются периодические члены с периодами порядка времени обращения узла и перигелия.

Метод приводит к большому числу вычислений тригонометрических рядов с двумя и четырьмя аргументами и численными коэффициентами. Была использована электронная вычислительная машина.

INTRODUCTION

Le problème général du mouvement de n planètes autour du Soleil conduit à la résolution d'un système de $3n$ équations différentielles du second ordre que l'on ramène en général à un système de $6n$ équations du premier ordre. Dans le cas où $n = 1$ (cas d'une seule planète tournant autour du Soleil) le problème se résout facilement : le mouvement de la planète est képlérien, il est entièrement déterminé par la donnée des six constantes classiques. En revanche dès que n est égal à 2 ou plus grand on ne peut pas résoudre rigoureusement le système différentiel ; on se contentera d'une solution approchée en tenant compte du fait que, la masse du Soleil étant prise égale à 1, les masses m , m' , m'' etc.. des planètes P , P' , P'' etc.. que l'on considère sont très petites.

On pourra alors calculer les éléments de l'orbite osculatrice de l'une des planètes, P par exemple, sous la forme de constantes, éléments de l'orbite képlérienne qu'aurait P en l'absence de toute perturbation, augmentées de fonctions du temps et des masses m' , m'' etc.. des planètes autres que P développées en séries entières de ces masses.

Quand on se limite au premier ordre des masses, approximation très souvent suffisante, les méthodes classiques font apparaître chaque élément osculateur comme la somme d'une constante, de termes périodiques dits à courte période parce que les périodes introduites sont de l'ordre de grandeur des temps de révolution des planètes autour du Soleil, et de termes séculaires c'est-à-dire proportionnels au temps. Si l'on poussait plus loin les développements en fonction des masses on verrait se former des termes proportionnels à des puissances quelconques du temps, appelés séculaires eux aussi, et des termes dits mixtes ou encore "termes de Poisson", produits de puissances du temps par des fonctions périodiques.

Tant que des termes séculaires du premier ordre ne figurent que dans des éléments angulaires (longitude du nœud, du périhélie, longitude moyenne de l'époque par exemple) ils n'offrent pas d'inconvénients. Les angles augmentent de 2π au bout d'un certain temps et la configuration du système présente de ce fait un caractère périodique. Si par contre des termes séculaires ou mixtes apparaissent dans les éléments métriques (demi-grand axe, excentricité, sinus de la demi inclinaison par exemple) il n'en est plus de même ; ces éléments devenant très grands avec le temps, semblent indiquer que le système est instable ; d'autre part les coefficients des termes périodiques sont des développements limités en excentricité et en inclinaison, quantités qu'il faut donc supposer petites. Il est bien évident que si l'on a trouvé des termes séculaires, cette dernière hypothèse sera fautive et que les formules trouvées ne représenteront le mouvement que pendant un temps court : quelques siècles par exemple.

Il a fallu cependant se contenter de solution de ce genre jusqu'à présent. Les théories classiques qui ont permis l'établissement des tables utilisées à l'heure actuelle n'y échappent pas ; qu'il s'agisse de la méthode de Le Verrier [7], de la théorie de Hansen [2, tome IV, chap. 20 et suivants], [8, chap. 14] ; des travaux de Newcomb par la méthode de Hill.

Or Poincaré [1] a démontré que l'on pouvait obtenir la solution sous la forme suivante : Au premier ordre des masses, les éléments métriques sont des constantes augmentées de termes à courte période et de termes périodiques de périodes très longues, de l'ordre des temps de révolution des nœuds et des périhélies ; quant aux éléments angulaires ils ont le même aspect mais possèdent de plus des termes proportionnels au temps. Les propriétés de cette solution sont conservées quelque soit l'ordre auquel on pousse les développements en fonction des masses. Certes les séries obtenues ne sont pas convergentes (les séries des théories classiques non plus) mais elles ne présentent plus les

graves inconvénients qu'avaient les séries contenant des termes séculaires et permettent de calculer la configuration du système dans un intervalle de temps considérable si non infini.

Ceci montre bien que l'existence des termes séculaires n'est pas liée à la nature même du problème mais à la façon dont on intègre. Dans les théories classiques on est amené, pour obtenir les termes d'ordre zéro par rapport aux masses, à négliger tout d'abord la fonction perturbatrice ; l'orbite obtenue est képlérienne, le nœud et le périhélie sont donc fixes. A l'ordre un des masses on voit qu'en fait le nœud et le périhélie bougent et c'est bien à cette différence fondamentale entre l'orbite de départ et l'orbite réelle que sont dues les conséquences gênantes dont on a parlé.

De nombreuses recherches ont été consacrées à cette question. La méthode de Lagrange [2] met en lumière le caractère purement périodique des éléments métriques au prix d'une simplification draconienne des équations dans lesquelles on se limite en effet au second ordre des excentricités et des inclinaisons. On fait abstraction aussi des termes à courte période.

La méthode de Lindstedt [1] tente d'obtenir la solution générale souhaitée et y réussit pour des équations, plus générales que celles de la Mécanique Céleste, dans lesquelles la partie d'ordre zéro du hamiltonien (on discute en effet sur les équations canoniques) contient toutes les variables métriques ; malheureusement dans le cas d'une théorie planétaire cette condition n'est pas réalisée et la méthode devient inapplicable.

Poincaré [1, chap. 9 et suivants] s'est efforcé de l'adapter à ce cas particulier mais s'il a dit qu'il était théoriquement possible d'étendre la méthode de Lindstedt au cas des planètes il ne donne aucun moyen pratique de surmonter les calculs analytiques laborieux qui permettraient d'y arriver. Von Zeipel a essayé d'appliquer sans succès une méthode originale qui s'est révélée très intéressante pour d'autres problèmes [14].

Gylden [2, tome IV, chap. 23 et 24], suivi par de nombreux élèves (en particulier Brendel) a réussi à obtenir les perturbations sous forme purement périodique. Il prend non pas le temps comme variable indépendante mais la longitude moyenne et l'inconvénient majeur de sa méthode est que le temps étant obtenu sous forme de série trigonométrique, il faut inverser cette série pour obtenir les éléments.

Brouwer [13] a parfaitement résumé l'état de la question et jeté les bases d'une méthode possible. Il préconise en particulier de traiter tout d'abord les perturbations séculaires puis, les coordonnées rectangulaires s'étant révélées peu pratiques, d'adopter les éléments de l'orbite osculatrice comme variables, en calculant numériquement les coefficients des termes périodiques. Il a, aidé de Van Woerkom, esquissé la solution du mouvement de Jupiter et de Saturne en négligeant les inclinaisons, mais s'est heurté rapidement à des difficultés de calculs insurmontables à cette époque (1955) où les calculateurs électroniques n'avaient pas encore la capacité ni la vitesse qu'ils atteignent aujourd'hui. (J. Kovalevsky, en 1959, a rencontré les mêmes difficultés en voulant continuer le travail de Van Woerkom).

Nous guidant sur ces principes nous avons décidé de traiter le problème de deux planètes seulement Jupiter et Vesta, ou plus exactement la masse de Vesta étant négligeable, le problème de Vesta perturbée par Jupiter dont l'orbite est supposée képlérienne. On verra au chapitre 5 comment ou pourrait étendre cette méthode au cas général des mouvements planétaires. Le choix de Vesta nous a paru judicieux étant donné que l'excentricité et l'inclinaison de son orbite sur le plan de l'orbite de Jupiter sont petites sans être trop faibles, d'autre part, contrairement au cas de Jupiter et de Saturne, il n'y a pas de phénomène de résonance qui introduirait des petits diviseurs au cours de l'intégration. Nous n'avons pas voulu, en effet, mêler des difficultés d'ordres très différents ; en revanche nous n'avons pas négligé l'inclinaison.

De même, pour la clarté de l'exposition et la réduction au minimum de calculs très complexes, on a supposé que Jupiter était la seule planète troublante et l'on a négligé les perturbations du second ordre mais nous verrons que tous les éléments nécessaires à l'établissement d'une théorie plus complète sont contenus dans la méthode exposée.

Les calculs, qui se réduisent pour la plupart à des multiplications entre elles de séries trigonométriques à deux ou quatre arguments, ont été effectués sur ordinateur électronique (I. B. M. 650 de l'Observatoire de Meudon et Gamma 30 S à disques à haute performance du Bureau des Longitudes). On se rendra aisément compte dans la suite que, sans l'aide de cette technique, l'exploitation de la théorie eût été impossible.

Le mouvement de Vesta a été étudié, par la méthode classique de Le Verrier, par Perrotin [3] puis par la méthode de Hansen par Leveau [4], enfin une intégration numérique du mouvement a été faite par Hergett [5].

La théorie de Perrotin nous a été fort utile, on lui a emprunté certains termes de la fonction perturbatrice. Elle a permis aussi de vérifier l'exactitude de nos calculs.

Le premier chapitre de ce mémoire est consacré aux valeurs des constantes d'intégration, aux axes et aux variables choisies, aux équations du mouvement. La méthode de Lagrange donne l'allure très générale de la solution et justifie le choix des variables.

Le second chapitre est réservé à l'exposé de la méthode, appliquée tout d'abord pour les termes à longue période dans le troisième chapitre, puis pour l'ensemble des termes dans le quatrième. Le cinquième chapitre rassemble quelques réflexions sur l'influence des termes négligés et préconise quelques généralisations possibles.

CHAPITRE I — CONSIDÉRATIONS PRÉLIMINAIRES

1 - CHOIX DES AXES. CONSTANTES D'INTEGRATION.

L'origine O du système $Oxyz$ est le Soleil, Ox et Oy sont dans le plan de l'orbite de Jupiter supposée képlérienne, Ox étant dirigé vers le périhélie Π_J de Jupiter. $Oxyz$ forme un trièdre trirectangle et direct (figure 1). V représente Vesta et J Jupiter.

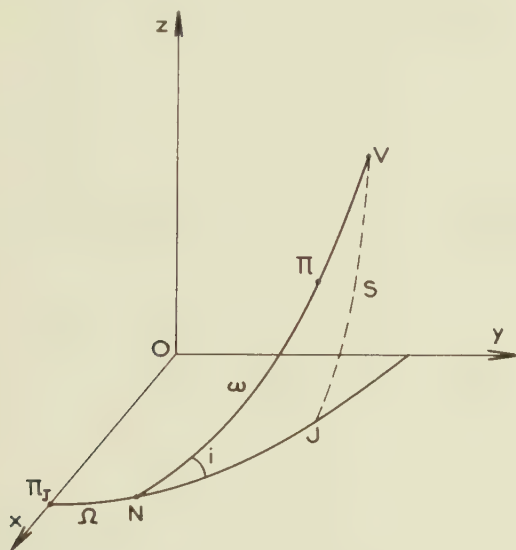


Figure 1.



Figure 2

Soient à l'instant t , a , e , i le demi-grand axe, l'excentricité et l'inclinaison sur le plan xOy de l'orbite osculatrice de V , le nœud ascendant N a pour longitude $\Omega = Ox, ON$, le périhélie Π est défini par $ON, O\Pi = \omega$.

Si l'on avait pris pour plan de référence le plan de l'écliptique 1950,0 et pour origine dans ce plan l'équinoxe moyen, les éléments osculateurs de l'orbite de V auraient été respectivement a , e , j , $\bar{\Omega}$, $\bar{\omega}$, (le nœud ascendant de l'orbite sur l'écliptique étant $\bar{N}$). De même pour Jupiter on aurait a' , e' , j' , $\bar{\Omega}'$, $\bar{\omega}'$ (le nœud étant $\bar{N}'$). Nous n'avons pas ici à considérer les temps de passage aux périhélies, puisque l'on fait seulement un changement d'axes.

Il nous faut passer de ce système, représenté sur la figure 2, au système $Oxyz$. Les éléments de Vesta pour 1950,0 ont été pris dans les "Efemeridy malikh planet" (Institut d'Astronomie théorique de Leningrad 1961) et ceux de Jupiter proviennent des tables de Hill et l'on a :

$a = 2,3617 \text{ U.A.}$	$a' = 5,202803$	$\bar{\Omega} = 104^{\circ}102$	$\bar{\Omega}' = 100^{\circ}145$
$e = 0,0888769$	$e' = 0,0484354$	$\bar{\omega} = 149^{\circ}134$	$\bar{\omega}' = -86^{\circ}467$
$j = 7^{\circ}132$	$j' = 1^{\circ}3048$		

La figure 2 montre que :

$$\cos i = \cos j \cos j' + \sin j \sin j' \cos(\bar{\Omega} - \bar{\Omega}') = 0,9948262$$

Donc $i = 5,830$. Nous nous servirons beaucoup de $\sigma^2 = \sin^2 \frac{i}{2}$ qui vaut donc 0,00258617.

On a aussi :

$$\omega = \widehat{N\Pi} = \widehat{N\Pi} - \widehat{N\bar{N}} \quad , \quad \text{or } \sin \widehat{N\bar{N}} = \frac{\sin j'}{\sin i} \sin(\bar{\Omega} - \bar{\Omega}'),$$

donc

$$\bar{N\bar{N}} = 0,8864 \quad \text{et} \quad \omega = 148,248.$$

D'autre part

$$\widehat{\Pi_1 N} = \Omega = \widehat{N'N} - \bar{\omega}' \quad , \quad \text{or } \sin \widehat{N'N} = \frac{\sin j}{\sin i} \sin(\bar{\Omega} - \bar{\Omega}'),$$

et

$$\widehat{N'N} = 4,8385 \quad , \quad \bar{\Omega} = 91,307$$

Nous avons donc dans notre système d'axe, à l'époque initiale 1950,0, les éléments suivants (fixes pour Jupiter dans la suite, osculateurs à cet instant pour Vesta).

Vesta		Jupiter
$a = 2,3617$ U. A		$a' = 5,202803$
$e = 0,0888769$		$e' = 0,0484354$
$i = 5,830$	$\sigma^2 = \sin^2 \frac{i}{2} = 0,00258617$	$i' = 0$
$\Omega = 91,307$		$\Omega' = \text{sans signification}$
$\omega = 148,248$		$\omega' = 0$

On posera $\alpha = \frac{a}{a'}$. On voit que $\alpha = 0,453928$ mais nous prendrons en fait $\alpha = 0,453925$ valeur qui nous fera commettre une erreur tout à fait négligeable et qui a le mérite d'avoir été utilisée par Perrotin dans le calcul de certaines fonctions, ce qui nous évitera d'avoir à les redéterminer.

2 - EQUATIONS DU MOUVEMENT.

Soient l , l'anomalie moyenne de Vesta sur l'orbite osculatrice à l'instant t et l' l'anomalie moyenne de Jupiter, τ et τ' étant les temps de passages aux périhélie respectifs on a :

$$l = n(t - \tau) \quad , \quad l' = n'(t - \tau')$$

n et n' étant définis par :

$$n^2 a^3 = f \quad , \quad n'^2 a'^3 = f(1 + m'),$$

formules dans lesquelles f représente la constante de la gravitation universelle.

Cela posé, la fonction perturbatrice traduisant l'action de Jupiter sur Vesta est :

$$R = fm' \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{r \cos S}{r'^2} \right)$$

Dans cette formule Δ est la distance JV, r et r' les rayons vecteurs OV et OJ, S l'angle $\widehat{OJ, OV}$, m' la masse de Jupiter ($m' = 1/1047,355$). Si l'on écrit les équations du mouvement de V en utilisant les équations de Lagrange [6] on a :

$$\begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial l} \\
 \frac{de}{dt} &= \frac{-\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \cdot \frac{\partial R}{\partial \omega} + \frac{1-e^2}{na^2 e} \cdot \frac{\partial R}{\partial l} \\
 \frac{di}{dt} &= \frac{-1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \cdot \frac{\partial R}{\partial \Omega} + \frac{\cos i}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \cdot \frac{\partial R}{\partial \omega} \\
 \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \cdot \frac{\partial R}{\partial i} \\
 \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \cdot \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \cdot \frac{\partial R}{\partial i} \\
 \frac{dl}{dt} &= n - \frac{2}{na} \cdot \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2 e} \cdot \frac{\partial R}{\partial e}
 \end{aligned} \tag{1}$$

On peut aussi se servir des variables canoniques de Delaunay définies ainsi :

$$\begin{aligned}
 L &= \sqrt{fa} & , & & G &= \sqrt{fa(1-e^2)} & , & & H &= \sqrt{fa(1-e^2)} \cos i \\
 l & & , & & g &= \omega & , & & h &= \Omega
 \end{aligned}$$

variables auxquelles nous adjoindrons l' et L' canoniquement conjuguée à l' mais dont la signification physique importe peu et que nous ne calculerons pas. On a alors :

$$\begin{aligned}
 \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l} & \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial g} & \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial h} & \frac{dL'}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l'} \\
 \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L} & , & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial G} & , & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial H} & , & \frac{dl'}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L'}
 \end{aligned} \tag{2}$$

Le hamiltonien F est donné par la formule

$$F = \frac{f^2}{2L^2} - n'L' + R$$

Nous utiliserons tantôt le système (1) tantôt le système (2), R étant exprimé en fonction des variables $a, e, i, \omega, \Omega, l, l'$ dans le premier cas, en fonction de L, G, H, l, g, h, l' dans le second.

3 - LA FONCTION PERTURBATRICE ET SES DERIVEES.

La résolution du système (1), ou du système (2), se fait généralement en remplaçant R dans les seconds membres par un développement en série trigonométrique que l'on écrira par exemple sous la forme :

$$R = N(L, G, H) + \sum_{j_1 j_2} P_{j_1 j_2}(L, G, H) \cos(j_1 g + j_2 h) + \sum_{i_1 i_2 i_3 i_4} Q_{i_1 i_2 i_3 i_4}(L, G, H) \cos(i_1 l + i_2 l' + i_3 g + i_4 h) \tag{3}$$

Dans les termes du dernier groupe du second membre on suppose que l'on n'a jamais simultanément $i_1 = 0$, $i_2 = 0$; s'il en était ainsi le terme correspondant ferait partie du deuxième groupe. La tradition attribuée à ces termes du dernier groupe du second membre de la formule (3) le nom de "termes à courte période de la fonction perturbatrice". le reste des termes s'appelant "partie séculaire de la fonction perturbatrice".

On trouvera des méthodes de développement dans Le Verrier [7], Tisserand [2], Brouwer et Clemence [8]. Nous n'utiliserons pas ces développements analytiques pour les termes à courte période, en revanche on verra que nous aurons besoin des termes séculaires. De tels termes ne peuvent provenir que de la partie $\frac{fm'}{\Delta}$ de R dite partie principale ce qui se démontre facilement, (voir par exemple l'ouvrage de Brouwer et Clemence [8, page 508]). On peut les obtenir, au prix de calculs un peu compliqués de certaines fonctions du rapport des grands axes avec toute l'approximation désirée. Nous les avons empruntés à Perrotin en adoptant, comme nous l'avons dit, la valeur de α qu'il avait prise et en prenant nos notations. Nous laisserons apparaître a , e , $\sigma^2 = \sin^2 \frac{i}{2}$ étant entendu que ces quantités sont considérées comme fonctions de L , G , H quand besoin est.

a) Terme séculaire pur. C'est le terme $N(L, G, H)$ de la formule (3) que nous appellerons ainsi. On a :

$$\begin{aligned} N = \frac{fm'}{a'} [& 1,058487 + 0,119304(e^2 + e'^2) - 0,477215 \sigma^2 + 0,033098 e^4 + 0,428499 e^2 e'^2 \\ & + 0,240805 e'^4 - 1,71399 e^2 \sigma^2 - 1,71399 e'^2 \sigma^2 + 1,47536 \sigma^4 \\ & - 1,7434 e^4 \sigma^2 - 14,210 e^2 e'^2 \sigma^2 + 13,354 e^2 \sigma^4 + 13,354 e'^2 \sigma^4] \end{aligned}$$

On pourrait remplacer dès maintenant e' par sa valeur puisqu'elle est destinée à rester constante dans toute la théorie. En fait nous n'aurons besoin que des dérivées $\partial N / \partial L$, $\partial N / \partial G$, $\partial N / \partial H$, ce n'est qu'après les avoir calculées que nous ferons cette substitution. on a :

$$\frac{\partial N}{\partial L} = \frac{\partial N}{\partial a} \frac{da}{dL} + \frac{\partial N}{\partial e^2} \frac{\partial e^2}{\partial L} \quad ; \quad \text{Or } L^2 = fa \quad \text{et} \quad \frac{da}{dL} = \frac{2L}{f}$$

$$e^2 = 1 - \frac{G^2}{L^2} \quad , \quad \frac{\partial e^2}{\partial L} = -\frac{2G^2}{L^3}$$

De même :

$$\frac{\partial N}{\partial G} = \frac{\partial N}{\partial e^2} \frac{\partial e^2}{\partial G} + \frac{\partial N}{\partial \sigma^2} \frac{\partial \sigma^2}{\partial G}$$

avec

$$\frac{\partial e^2}{\partial G} = -\frac{2G}{L^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \sigma^2}{\partial G} = \frac{H}{2G^2}$$

$$\text{Car } 2\sigma^2 = 1 - \frac{H}{G}$$

Enfin

$$\frac{\partial N}{\partial H} = \frac{\partial N}{\partial \sigma^2} \cdot \frac{\partial \sigma^2}{\partial H} \quad \text{avec} \quad \frac{\partial \sigma^2}{\partial H} = -\frac{1}{2G}$$

En effectuant les calculs on trouve finalement, en exprimant les éléments métriques en fonction de a , e , σ^2 , en remplaçant e' par sa valeur et f par $n_0^2 a^3$ (en vertu de la troisième loi de Képler) :

$$\frac{\partial N}{\partial L} = n_0 \alpha m' [0,509028 + 0,612784 e^2 - 6,3787 \sigma^2 + 0,28933 e^4 - 19,7438 e^2 \sigma^2 + 12,0024 \sigma^4 + 3,4868 e^4 \sigma^2]$$

$$\frac{\partial N}{\partial G} = n_0 \alpha m' [-0,481236 - 1,006057 e^2 + 5,48259 \sigma^2 + 21,321 e^2 \sigma^2 - 1,304456 e^4 - 29,721 \sigma^4 - 13,835 e^2 \sigma^4] \quad (4)$$

$$\frac{\partial N}{\partial H} = n_0 \alpha m' [0,240618 + 0,993974 e^2 - 1,50669 \sigma^2 - 14,707 e^2 \sigma^2 + 1,400728 e^4]$$

b) Termes à longue période. Nous appellerons ainsi les termes de la forme $P_{j_1 j_2} \cos(j_1 g + j_2 h)$. Il y en a six qui ne sont pas négligeables :

$$P_{11} \cos(g + h), \quad P_{22} \cos(2g + 2h), \quad P_{20} \cos 2g, \quad P_{1,-1} \cos(g - h), \quad P_{02} \cos 2h, \quad P_{31} \cos(3g + h)$$

On a :

$$P_{11} = \frac{fm'}{a} [-0,006435 e - 0,011002 e^3 + 0,131647 e \sigma^2 + 0,463193 e^3 \sigma^2 - 1,1767 e \sigma^4]$$

$$P_{22} = \frac{fm'}{a} \cdot 0,000293 e^2$$

$$P_{20} = \frac{fm'}{a} [1,9556 e^2 \sigma^2 - 14,514 e^2 \sigma^4]$$

$$P_{1,-1} = \frac{fm'}{a} [-0,069011 e \sigma^2 - 0,237062 e^3 \sigma^2 + 0,82636 e \sigma^4] \quad (5)$$

$$P_{02} = \frac{fm'}{a} \cdot 0,00062 \sigma^2$$

$$P_{31} = \frac{fm'}{a} [-0,2183 e^3 \sigma^2]$$

Les dérivées par rapport aux éléments angulaires s'obtiennent très facilement :

$$\frac{\partial}{\partial g} [P_{j_1 j_2} \cos(j_1 g + j_2 h)] = -j_1 P_{j_1 j_2} \sin(j_1 g + j_2 h)$$

on a une formule analogue pour la dérivée par rapport à h. Quant aux dérivées par rapport aux variables métriques elles sont :

$$\frac{\partial P_{j_1 j_2}}{\partial L} \cdot \cos(j_1 g + j_2 h), \quad \frac{\partial P_{j_1 j_2}}{\partial G} \cdot \cos(j_1 g + j_2 h), \quad \frac{\partial P_{j_1 j_2}}{\partial H} \cdot \cos(j_1 g + j_2 h)$$

On les calcule comme les dérivées de N et l'on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{11}}{\partial L} = n_0 \alpha m' & \left(-0,006435 \frac{1}{e} - 0,077159 e + 0,131647 \frac{\sigma^2}{e} + 2,6478 e \sigma^2 - 1,1767 \frac{\sigma^4}{e} \right. \\ & \left. - 0,09049 e^3 - 0,46320 e^3 \sigma^2 - 1,1767 e \sigma^4 \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial P_{22}}{\partial L} = n_0 \alpha m' (0,000586 + 0,002910 e^2)$$

$$\frac{\partial P_{20}}{\partial L} = n_0 \alpha m' (3,9112 \sigma^2 - 29,028 \sigma^4 + 11,8086 e^2 \sigma^2)$$

$$\frac{\partial P_{1-1}}{\partial L} = n_0 \alpha m' \left(-0,069011 \frac{\sigma^2}{e} - 1,3622 e \sigma^2 + 0,82636 \frac{\sigma^4}{e} + 0,23706 e^3 \sigma^2 + 0,8264 e \sigma^4 \right) \quad (6)$$

$$\frac{\partial P_{02}}{\partial L} = n_0 \alpha m' . 0,00792 \sigma^2$$

$$\frac{\partial P_{31}}{\partial L} = n_0 \alpha m' (-0,6549 e \sigma^2 + 0,2182 e^3 \sigma^2)$$

Nous avons ensuite :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{11}}{\partial G} = n_0 \alpha m' \left(0,006435 \frac{1}{e} - 0,131647 \frac{\sigma^2}{e} + 1,1767 \frac{\sigma^4}{e} + 0,095630 e - 2,6321 e \sigma^2 \right. \\ \left. + 0,247202 e^3 - 0,5884 e \sigma^4 - 0,4061 e^3 \sigma^2 \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial P_{22}}{\partial G} = n_0 \alpha m' (-0,000586 + 0,000293 e^2 + 0,000074 e^4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{20}}{\partial G} = n_0 \alpha m' (0,9778 e^2 - 3,9112 \sigma^2 + 29,028 \sigma^4 - 14,514 e^2 \sigma^2 + 0,4889 e^4 \\ + 29,028 e^2 \sigma^4 - 6,579 e^4 \sigma^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{1-1}}{\partial G} = n_0 \alpha m' \left(0,069011 \frac{\sigma^2}{e} - 0,82636 \frac{\sigma^4}{e} - 0,034506 e + 1,5205 e \sigma^2 - 0,135784 e^3 \right. \\ \left. + 0,32053 e^3 \sigma^2 + 0,41318 e \sigma^4 \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial P_{02}}{\partial G} = n_0 \alpha m' (0,00031 + 0,00016 e^2 - 0,00062 \sigma^2 - 0,00031 e^2 \sigma^2 + 0,000116 e^4)$$

(7)

$$\frac{\partial P_{31}}{\partial G} = n_0 \alpha m' (-0,10915 e^3 + 0,6550 e \sigma^2 - 0,1092 e^3 \sigma^2)$$

$$\frac{\partial P_{11}}{\partial H} = n_0 \alpha m' (-0,065824 e - 0,264509 e^3 + 1,1767 e \sigma^2 + 0,5884 e^3 \sigma^2)$$

$$\frac{\partial P_{22}}{\partial H} = 0$$

$$\frac{\partial P_{20}}{\partial H} = n_0 \alpha m' (-0,9778 e^2 + 14,514 e^2 \sigma^2 - 0,4889 e^4 + 7,014 e^4 \sigma^2)$$

$$\frac{\partial P_{1-1}}{\partial H} = n_0 \alpha m' (0,034506 e + 0,135784 e^3 - 0,82636 e \sigma^2 - 0,41318 e^3 \sigma^2)$$

$$\frac{\partial P_{02}}{\partial H} = n_0 \alpha m' (-0,00031 - 0,00016 e^2 - 0,00012 e^4)$$

$$\frac{\partial P_{31}}{\partial H} = n_0 \alpha m' . 0,1092 e^3$$

Nous avons ainsi regroupé ici toutes les quantités dont nous aurons besoin dans la suite.

4 - ETUDE PRELIMINAIRE PAR LA METHODE DE LAGRANGE.

En ne prenant dans R que les termes séculaires d'ordre 2 au plus en e, e', σ on a :

$$R = \frac{fm'}{a'} [1,058487 + 0,119304(e^2 + e'^2) - 0,477215 \sigma^2 - 0,006435 e \cos(g + h)]$$

ce qui donne, en remplaçant e' par sa valeur :

$$R = \frac{fm'}{a'} [1,058767 + 0,119304 e^2 - 0,477215 \sigma^2 - 0,006435 e \cos(g + h)]$$

Prenons pour variables :

$$x = e \sin(g + h) \quad \xi = tg i \sin h$$

$$y = e \cos(g + h) \quad \eta = tg i \cos h$$

On sait qu'en négligeant les puissances de e et i au-delà de la seconde on a :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{na^2} \cdot \frac{\partial R}{\partial y} \quad \frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{na^2} \cdot \frac{\partial R}{\partial \eta}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{na^2} \cdot \frac{\partial R}{\partial x} \quad \frac{d\eta}{dt} = -\frac{1}{na^2} \cdot \frac{\partial R}{\partial \xi}$$

Ici a est évidemment constant et R s'écrit :

$$R = \frac{fm'}{a'} \left[1,058767 + 0,119304(x^2 + y^2) - 0,477215 \frac{\xi^2 + \eta^2}{4} - 0,006435 y \right]$$

Car

$$\sigma^2 = \sin^2 \frac{i}{2} \neq \frac{i^2}{4} \quad \text{et} \quad \xi^2 + \eta^2 = tg^2 i \neq i^2$$

On a tout d'abord :

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{fm'}{na^2 a'} \left(\frac{-0,477215}{2} \eta \right) \quad ; \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{fm'}{na^2 a'} \left(\frac{0,477215}{2} \xi \right)$$

ou

$$\frac{d\xi}{dt} = -0,2386075 n \alpha m' \eta \quad ; \quad \frac{d\eta}{dt} = 0,2386075 n \alpha m' \xi$$

En posant $K = 0,2386075 n \alpha m'$, on voit que la solution est :

$$\xi = i_0 \cos K(t - t_0) \quad , \quad \eta = i_0 \sin K(t - t_0)$$

t_0 et i_0 étant des constantes. L'inclinaison $i = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = i_0$ est donc constante et le nœud rétrograde, son moyen mouvement étant $0,2386075 n \alpha m'$.

On a de même :

$$\frac{dx}{dt} = n\alpha m'(0,238608 y - 0,006435) \quad , \quad \frac{dy}{dt} = -0,238608 n\alpha m'x$$

ce qui est de la forme

$$\frac{dx}{dt} = K'y - \lambda \quad \frac{dx}{dt} = -K'x$$

On a donc

$$x = x_0 \sin K'(t - t_1)$$

$$y = x_0 \cos K'(t - t_1) + y_0$$

x_0 , y_0 et t_1 étant des constantes. Pour que le système différentiel soit vérifié il faut que $y_0 = \frac{\lambda}{K'}$.

On voit que :

$$e^2 = x^2 + y^2 = x_0^2 + \frac{\lambda^2}{K'^2} + 2x_0 \frac{\lambda}{K'} \cos K'(t - t_1) = x_0^2 + 0,000727 + 2x_0 \cdot 0,026969 \cos K'(t - t_1)$$

Il en est ainsi à l'instant initial pour lequel $e = 0,0888769$ et $g + h = 239,555$, on en déduit que $x_0 = 0,105145$ et que :

$$e^2 = 0,011782 + 0,005672 \cos K'(t - t_1)$$

Donc e ne s'annule pas et varie, en gros, entre 0,078 et 0,132.

Nous justifions ainsi l'emploi des variables e et i dans la suite. En effet e et i figurent au dénominateur dans certains des seconds membres des équations de Lagrange ; au cas où ces quantités auraient pu s'annuler il aurait fallu prendre d'autres variables.

La méthode employée dans ce paragraphe est tout à fait classique, on la trouvera dans les ouvrages de Mécanique Céleste [8, page 510 et suivantes par exemple].

CHAPITRE II — EXPOSÉ GÉNÉRAL DE LA MÉTHODE

Nous raisonnerons sur les équations canoniques :

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l} & ; & & \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial g} & ; & & \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial h} & ; & & \frac{dL'}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l'} \\ \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L} & ; & & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial G} & ; & & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial H} & ; & & \frac{dl'}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L'} \end{aligned} \quad (2)$$

Avec

$$F = \frac{f^2}{2L^2} - n'L' + R$$

$$\text{et} \quad R = N + \sum P_{j_1 j_2} \cos(j_1 g + j_2 h) + \sum Q_{i_1 i_2 i_3 i_4} \cos(i_1 l + i_2 l' + i_3 g + i_4 h) \quad (3)$$

N , les $P_{j_1 j_2}$ et les $Q_{i_1 i_2 i_3 i_4}$ étant des fonctions de L , G , H seulement. Comme R contient en facteur le petit paramètre m' il paraît naturel de négliger tout d'abord R . Le système (2) est alors très simple à résoudre ; on voit tout de suite que L , G , H , g , h sont des constantes L_0 , G_0 , H_0 , g_0 , h_0 et que l est une fonction linéaire du temps. Nous trouvons ainsi l'approximation classique du mouvement par le mouvement képlérien.

Pour obtenir une approximation meilleure reportons les valeurs trouvées précédemment pour les variables dans les seconds membres de (2). L'équation en g , par exemple, donne :

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial N}{\partial G}(L_0, G_0, H_0) - \sum \frac{\partial P_{j_1 j_2}}{\partial G}(L_0, G_0, H_0) \cos(j_1 g_0 + j_2 h_0) - \sum \frac{\partial Q_{i_1 i_2 i_3 i_4}}{\partial G}(L_0, G_0, H_0) \\ &\quad \cos(i_1 l + i_2 l' + i_3 g_0 + i_4 h_0) \end{aligned}$$

Comme l et l' sont des fonctions linéaires du temps le dernier groupe du second membre donnera, après intégration, des termes périodiques (en sinus). Au contraire, tout étant constant dans $\frac{\partial N}{\partial G}(L_0, G_0, H_0)$ et dans les termes du groupe suivant, on verra apparaître dans g en intégrant une fonction linéaire du temps. On aurait pour l et h des résultats analogues.

Prenons maintenant l'équation en G , elle s'écrit :

$$\frac{dG}{dt} = -\sum P_{j_1 j_2}(L_0, G_0, H_0) \cdot j_1 \sin(j_1 g_0 + j_2 h_0) - \sum Q_{i_1 i_2 i_3 i_4}(L_0, G_0, H_0) \cdot i_3 \sin(i_1 l + i_2 l' + i_3 g_0 + i_4 h_0)$$

Le second groupe du second membre donne par intégration des termes périodiques mais ceux du premier groupe qui sont constants introduiront dans l'élément métrique G un terme séculaire ce que nous voulons éviter.

On voit sans peine qu'il en serait de même pour H . Quant à L , à ce stade, il échappe encore au sort des deux autres éléments métriques du fait que le second membre de l'équation en L , qui est $\frac{\partial F}{\partial l}$, contient forcément l sous les signes sinus.

Quand on reportera la nouvelle solution dans les seconds membres pour avoir une approximation meilleure les termes séculaires trouvés se maintiendront et donneront naissance à des termes proportionnels à d'autres puissances du temps que la première et à des termes mixtes. L n'aura pas de termes séculaires dans la solution au second ordre en m' comme l'a démontré Poisson [2], cependant de tels termes apparaîtront si l'on pousse l'approximation plus loin [8, p. 529].

Pour éviter les termes séculaires dans les éléments métriques, nous nous affranchirons tout d'abord de toute notion d'ordre par rapport au petit paramètre m' . Nous avons vu en effet qu'en prenant comme première orbite approchée l'orbite képlérienne, qui correspond à l'ordre zéro, nous étions conduit à trouver des termes séculaires.

Reprenons le système (2) et intégrons le en limitant arbitrairement R à $R = N(L, G, H)$ (voir formule 3).

On obtient alors pour L, G, H des constantes L_0, G_0, H_0 , pour l et l' des fonctions linéaires du temps d'ordre zéro par rapport à m' .

$$l = n(t - \tau) \quad , \quad l' = n'(t - \tau')$$

et pour g et h des fonctions linéaires du temps d'ordre 1 par rapport à m'

$$g = -\frac{\partial N}{\partial G}(L_0, G_0, H_0) \cdot (t - t_1) \quad ; \quad h = -\frac{\partial N}{\partial H}(L_0, G_0, H_0) (t - t_2)$$

Soit

$$g = n_g(t - t_1) = \bar{g} \quad , \quad h = n_h(t - t_2) = \bar{h}$$

Reportons maintenant la solution trouvée dans les équations (2) complètes, c'est-à-dire, les équations (2) où R est donnée par (3). L'équation en g par exemple s'écrira :

$$\frac{dg}{dt} = -\frac{\partial N}{\partial G}(L_0, G_0, H_0) - \sum \frac{\partial P_{j_1 j_2}}{\partial G}(L_0, G_0, H_0) \cos(j_1 \bar{g} + j_2 \bar{h}) - \sum \frac{\partial Q_{i_1 i_2 i_3 i_4}}{\partial G}(L_0, G_0, H_0) \cos(i_1 l + i_2 l' + i_3 \bar{g} + i_4 \bar{h})$$

En intégrant on verra que g est égal à $\bar{g}$, fonction linéaire du temps, augmenté de termes à courte période venant du troisième groupe de termes du second membre de la formule précédente et de termes à longue période venant du second groupe.

Ces derniers termes sont en effet à longue période puisqu'ils contiennent des sommes de termes de période $2\pi/j_1 n_g + j_2 n_h$ et que n_g et n_h sont proportionnels au petit paramètre. Il faut remarquer d'autre part que les coefficients de ces termes sont grands, d'ordre zéro par rapport à m' , car en intégrant les termes du second groupe il faut diviser des coefficients proportionnels à m' par les coefficients du temps dans les cosinus qui le sont aussi.

Envisageons maintenant l'une des équations aux variables métriques. Par exemple :

$$\frac{dG}{dt} = -\sum P_{j_1 j_2}(L_0, G_0, H_0) j_1 \sin(j_1 \bar{g} + j_2 \bar{h}) - \sum Q_{i_1 i_2 i_3 i_4}(L_0, G_0, H_0) i_3 \sin(i_1 l + i_2 l' + i_3 \bar{g} + i_4 \bar{h})$$

nous aurons un résultat analogue à ceci près qu'il n'y aura pas de terme séculaire puisque maintenant nous n'avons que des fonctions périodiques dans le second membre.

La solution trouvée sera reportée dans les seconds membres, on intégrera de nouveau et l'on reportera la nouvelle solution dans les seconds membres etc.. Le processus sera reconduit jusqu'à ce que les coefficients des termes périodiques se soient stabilisés.

En effet il faut bien agir ainsi car étant donné la façon dont nous avons procédé, la première solution trouvée n'est pas la solution d'ordre zéro par rapport à m' , la seconde n'est donc pas la solution d'ordre 1. C'est un processus d'itération qui pourra nous conduire à une solution considérée comme définitive du fait que les coefficients des termes périodiques seront égaux à ce qu'ils étaient dans la solution précédente à une certaine approximation près fixée à l'avance. Nous prendrons cette précision égale à $5 \cdot 10^{-6}$ radians soit environ $1''$. Ceci est de l'ordre de grandeur des termes du 1er ordre dans les théories classiques c'est pourquoi, nous dirons que nous faisons une théorie du 1er ordre. En fait, il y aurait des coefficients de termes du 1er ordre de l'ordre du centième de seconde (voir la théorie de Perrotin) mais nous n'avons pas pu les obtenir pour la raison suivante : la théorie faite ici donne à la place des termes séculaires des termes périodiques à longue période dont les coefficients, comme nous l'avons vu, sont grands. Nous verrons que l'un de ces coefficients atteint presque 20° , par conséquent, le calcul étant fait avec 8 chiffres significatifs, (calcul dit "en simple précision"), on ne peut espérer à cause des erreurs d'arrondi et de troncature des séries de Fourier, obtenir mieux que la seconde d'arc. Certes on aurait pu faire les calculs "en double précision" et avoir ainsi un nombre de chiffres significatifs plus grands mais, indépendamment du fait que le volume du traitement des données dépasserait pratiquement les possibilités de l'ordinateur dont nous disposons, ceci aurait peu de sens puisqu'on a envisagé uniquement les perturbations de Jupiter alors que Vénus, la Terre, Mars et Saturne provoquent dans le mouvement de Vesta des inégalités dont les amplitudes peuvent atteindre plusieurs secondes. (Mars en particulier, à cause d'une quasi commensurabilité des moyens mouvements, contribue à une inégalité de l'anomalie moyenne de Vesta d'amplitude voisine de $10''$). Revenons à la méthode d'intégration du système (2). Pour plus de commodité et de clarté nous l'avons effectuée en deux fois.

Tout d'abord réduisons R à :

$$R = N + \sum P_{j_1 j_2} \cos(j_1 g + j_2 h)$$

autrement dit, bornons nous à la partie séculaire de la fonction perturbatrice, L est constant et le système (2) se réduit aux quatre équations.

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial g} & \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial h} \\ \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial G} & ; & \quad \frac{dh}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial H} \end{aligned} \tag{9}$$

Après avoir intégré le système (9) on obtiendra l en substituant la solution dans l'équation :

$$\frac{dl}{dt} = \frac{f^2}{L_0^3} - \sum \frac{\partial P_{j_1 j_2}}{\partial L} \cos(j_1 g + j_2 h) - \frac{\partial N}{\partial L}$$

et en intégrant.

Pour intégrer le système (9) nous emploierons la méthode indiquée plus haut c'est-à-dire que nous prendrons bien soin de ne pas partir de $R = 0$ pour obtenir la première orbite intermédiaire. Après des itérations successives, décrites dans le chapitre suivant, nous obtiendrons finalement pour G et H des constantes augmentées de termes à longue période à coefficients d'ordre 0 ou 1 en m' . g , h et l seront des fonctions linéaires du temps dont les coefficients du temps seront d'ordre 1 en m' pour g et h , d'ordre 0 pour l , augmentées de termes à longue période analogues à ceux qui figurent dans G et H . L est constant.

Nous avons donc à ce stade une solution, certes incomplète puisque privée des termes à courte période, mais qui donne des indications intéressantes sur l'allure du mouvement pendant un temps très long. D'autre part, les calculs ont été grandement simplifiés du fait que nous n'avions à traiter que des séries trigonométriques à deux arguments.

Il faudra maintenant substituer la solution trouvée dans les équations complètes, R ayant sa forme la plus générale, et intégrer. Nous verrons apparaître les termes déjà calculés légèrement modifiés par la présence des termes à courte période et les termes à courte période eux-mêmes.

Faut-il substituer de nouveau la solution trouvée et intégrer ? Pour le voir nous raisonnerons sur une équation fictive unique.

Soit donc une fonction X définie par :

$$\frac{dX}{dt} = R_s(X) + R_{cp}(X)$$

$R_s(X)$ représente les "termes séculaires" de la fonction perturbatrice, $R_{cp}(X)$ les termes à courte période.

Nous avons trouvé X_0 solution de :

$$\frac{dX}{dt} = R_s(X)$$

X_0 comporte des termes à longue période d'ordre 0 ou 1 par rapport au petit paramètre m' . Portons X_0 dans le second membre de l'équation complète.

$$\frac{dX_1}{dt} = R_s(X_0) + R_{cp}(X_0) .$$

D'où

$$X_1 = X_0 + \Delta X_0$$

ΔX_0 comporte des termes à courte période seulement, d'ordre 1 en m' . On aurait maintenant :

$$\begin{aligned} \frac{dX_2}{dt} &= R_s(X_0 + \Delta X_0) + R_{cp}(X_0 + \Delta X_0) \\ &= R_s(X_0) + \frac{\partial R_s}{\partial X}(X_0) \cdot \Delta X_0 + \dots + R_{cp}(X_0) + \frac{\partial R_{cp}}{\partial X}(X_0) \cdot \Delta X_0 + \dots \end{aligned}$$

D'où

$$X_2 = X_1 + \int \frac{\partial R_s}{\partial X}(X_0) \cdot \Delta X_0 dt + \int \frac{\partial R_{cp}}{\partial X}(X_0) \cdot \Delta X_0 dt$$

(Les termes négligés sont d'ordre 3 au moins en m')

La première intégrale donne des termes du second ordre tous à courte période puisque la fonction à intégrer est le produit des termes à courte période par des termes à longue période. Nous ne les garderons pas.

La seconde fonction sous le signe $\int$ peut au contraire contenir des termes à longue période obtenus par combinaison des termes à courte période qui se trouvent dans les deux facteurs du produit à intégrer. Comme ce produit est du second ordre, par intégration on

aurait des termes à longue période du premier ordre nouveaux qu'il faudrait donc conserver.

Nous ne l'avons pas fait. En effet, ces termes apparaîtraient dans une théorie classique comme termes séculaires du second ordre. L'étude faite par Perrotin montre que de tels termes sont extrêmement petits, autrement dit les coefficients des termes à longue période correspondant seraient, bien que du premier ordre, inférieurs à $1''$ c'est pourquoi nous ne les calculerons pas.

Finalement dans la deuxième phase de la théorie nous nous contenterons de substituer dans les équations complètes, la solution obtenue à partir de la partie séculaire de la fonction perturbatrice et d'intégrer.

Pour terminer cet exposé de la méthode, nous ferons une remarque. Il peut exister dans les théories classiques des termes à longue période entièrement différents de ceux que nous considérons ici. En effet, s'il y a une quasi commensurabilité des moyens mouvements des deux planètes considérées, on peut trouver des entiers i_1 et i_2 tels que le coefficient du temps dans :

$$i_1 l + i_2 l' + i_3 g + i_4 h$$

soit très petit. On obtient par intégration du terme correspondant une inégalité à grande amplitude et de période longue. Nous les appellerons avec Gylden termes caractéristiques et termes élémentaires ceux que nous avons envisagés ici. Comme il a été dit il n'y a pas de termes caractéristiques dans la théorie de Vesta perturbée par Jupiter et nous appellerons termes à longue période tout court les termes élémentaires. (Terminologie de Tisserand [2 Tome IV p. 408]).

CHAPITRE III – CALCUL DES TERMES A LONGUE PÉRIODE

Il faut intégrer le système

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial g} & \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial h} \\ \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial G} & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial H} \end{aligned} \quad (9)$$

avec

$$R = N(L_0, G, H) + \sum P_{j_1 j_2}(L_0, G, H) \cos(j_1 g + j_2 h)$$

1 - ORBITE DE DEPART.

Comme nous l'avons vu on négligera tout d'abord les $P_{j_1 j_2}$ et leurs dérivées par rapport à G et H . En fait comme $\frac{\partial P_{11}}{\partial G}$ est assez grand, à cause de $1/e$ qui y figure, nous le conserverons si bien que l'on aura :

$$\frac{dG}{dt} = 0 \quad ; \quad \frac{dH}{dt} = 0$$

$$\frac{dg}{dt} = -\frac{\partial N}{\partial G}(L_0, G, H) - \frac{\partial P_{11}}{\partial G}(L_0, G, H) \cos(g + h) \quad ; \quad \frac{dh}{dt} = -\frac{\partial N}{\partial H}(L_0, G, H)$$

On a donc pour G et H des constantes G_0 et H_0 . Prenons pour variables angulaires :

$$\theta_1 = g + h \quad \text{et} \quad \theta_2 = 2h$$

on a :

$$\frac{d\theta_1}{dt} = - \left[\frac{\partial N}{\partial G}(L_0, G_0, H_0) + \frac{\partial N}{\partial H}(L_0, G_0, H_0) \right] - \frac{\partial P_{11}}{\partial G} \cos \theta_1 \quad ; \quad \frac{d\theta_2}{dt} = - 2 \frac{\partial N}{\partial H}(L_0, G_0, H_0)$$

Les formules (4) du chapitre 1 donnent quand on y remplace e et σ^2 par des constantes qui sont les valeurs osculatrices

$$-\frac{\partial N}{\partial G} = n_0 \alpha m' \times 0,474849 \quad -\frac{\partial N}{\partial H} = -n_0 \alpha m' \times 0,244371$$

De même la première des formules (5) donne :

$$-\frac{\partial P_{11}}{\partial G} = -n_0 \alpha m' \times 0,076728$$

On a donc tout de suite

$$\theta_2 = -0,488742 \cdot n_0 \alpha m' (t - t_0) = \Psi$$

puis

$$\frac{d\vartheta_1}{dt} = n_0 \alpha m'(0,230478 - 0,076728 \cos \vartheta_1)$$

L'équation différentielle ci-dessus s'intègre facilement. On fera le changement de variable $\operatorname{tg} \frac{\vartheta_1}{2} = u$ ce qui donne

$$\frac{du}{dt} = n_0 \alpha m'(0,076875 + 0,153603 u^2)$$

qui est de la forme

$$\frac{du}{dt} = \lambda (A^2 + u^2) \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} \lambda &= n_0 \alpha m' 0,153603 \\ A &= 0,707445 \end{aligned}$$

on a donc

$$\frac{1}{A} \operatorname{Arctg} \frac{u}{A} = \lambda (t - t_1) \quad \text{D'où} \quad \frac{u}{A} = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \quad ; \quad \text{en posant} \quad \frac{\varphi}{2} = A \lambda (t - t_1)$$

D'où finalement

$$u = \operatorname{tg} \frac{\vartheta_1}{2} = A \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} ,$$

si l'on pose $q = \frac{A-1}{A+1}$ on aura

$$\vartheta_1 = \varphi + 2q \sin \varphi + q^2 \sin 2\varphi + \frac{2}{3} q^3 \sin 3\varphi + \frac{1}{2} q^4 \sin 4\varphi + \dots$$

D'où

$$\begin{aligned} \vartheta_1 = \varphi - 0,342682 \sin \varphi + 0,029358 \sin 2\varphi - 0,003353 \sin 3\varphi + 0,000431 \sin 4\varphi \\ - 0,000059 \sin 5\varphi + \dots \end{aligned}$$

Nous nous limiterons ici.

L'orbite de départ est donc une ellipse de dimension, de forme et d'inclinaison fixe dont le nœud rétrograde d'un mouvement uniforme, le périhélie est affecté d'un mouvement de rotation direct auquel se superposent des inégalités à longue période. Remarquons que le coefficient de la plus importante d'entre elles est voisin d'un tiers de radian et vaut donc environ 17° .

2 - ITERATIONS POUR LE CALCUL DES TERMES A LONGUE PERIODE.

Il faut reporter la solution trouvée dans les seconds membres des équations (9) calculés maintenant sans rien négliger dans R, intégrer et reconduire le processus jusqu'à l'obtention de la stabilisation des coefficients des termes périodiques trouvés. Nous commencerons par modifier légèrement les équations (9). On gardera les variables ϑ_1 et ϑ_2 . Les arguments qui figurent sont (comme nous l'avons vu) :

$$g + h, \quad 2(g + h), \quad 2g, \quad g - h, \quad 2h, \quad 3g + h$$

qui deviennent

$$\theta_1, \quad 2\theta_1, \quad 2\theta_1 - \theta_2, \quad \theta_1 - \theta_2, \quad \theta_2, \quad 3\theta_1 - \theta_2$$

Nous prendrons comme variables métriques G/G_0 et H/H_0 , G_0 et H_0 étant les constantes trouvées pour l'orbite de départ. On aura donc

$$\frac{dG/G_0}{dt} = n_0 \alpha m' \sum Q_{i_1 i_2} \sin(i_1 \theta_1 + i_2 \theta_2) \quad ; \quad \frac{dH/H_0}{dt} = n_0 \alpha m' \sum T_{i_1 i_2} \sin(i_1 \theta_1 + i_2 \theta_2)$$

$$\frac{d\theta_1}{dt} = n_0 \alpha m' R_{00} - n_0 \alpha m' \sum R_{i_1 i_2} \cos(i_1 \theta_1 + i_2 \theta_2) \quad ; \quad \frac{d\theta_2}{dt} = n_0 \alpha m' S_{00} - n_0 \alpha m' \sum S_{i_1 i_2} \cos(i_1 \theta_1 + i_2 \theta_2)$$

En intégrant les deux premières équations on mettra 1 comme constante d'intégration. Il est facile de calculer les Q , T , R , S à partir des formules du chapitre 1.

On a :

$$Q_{i_1 i_2} = -j_1 \frac{P_{j_1 j_2}}{G_0 \cdot n_0 \alpha m'} \quad T_{i_1 i_2} = -j_2 \frac{P_{j_1 j_2}}{H_0 n_0 \alpha m'}$$

$$\text{avec } j_1 g + j_2 h = i_1 \theta_1 + i_2 \theta_2$$

D'où :

$$Q_{10} = 0,006461 e + 0,011046 e^3 - 0,132170 e \sigma^2 - 0,465033 e^3 \sigma^2 + 1,1814 e \sigma^4$$

$$Q_{20} = -0,000588 e^2$$

$$Q_{2,-1} = -3,9267 e^2 \sigma^2 + 29,1432 e^2 \sigma^4$$

$$Q_{1,-1} = 0,069285 e \sigma^2 + 0,238004 e^3 \sigma^2 - 0,82964 e \sigma^4$$

$$Q_{0,1} = 0$$

$$Q_{3,-1} = 0,6575 e^3 \sigma^2$$

$$T_{1,0} = 0,006494 e + 0,011103 e^3 - 0,132856 e \sigma^2 - 0,467446 e^3 \sigma^2 + 1,1875 e \sigma^4$$

$$T_{2,0} = -0,000591 e^2$$

$$T_{2,-1} = 0$$

$$T_{1,-1} = -0,069645 e \sigma^2 - 0,239238 e^3 \sigma^2 + 0,83395 e \sigma^4$$

$$T_{0,1} = -0,001251 \sigma^2$$

$$T_{3,-1} = 0,2203 e^3 \sigma^2$$

$$R_{0,0} = 0,240618 + 0,012083 e^2 - 3,9759 \sigma^2 - 6,614 e^2 \sigma^2 - 0,096272 e^4 + 29,721 \sigma^4$$

$$R_{1,0} = 0,006435 \frac{1}{e} - 0,131647 \frac{\sigma^2}{e} + 1,1767 \frac{\sigma^4}{e} + 0,029806 e - 1,4554 e \sigma^2 - 0,017307 e^3$$

$$R_{2,0} = -0,000586 + 0,000293 e^2$$

$$R_{2,-1} = -3,9112 \sigma^2 + 29,028 \sigma^4$$

$$R_{1,-1} = 0,069011 \frac{\sigma^2}{e} - 0,82636 \frac{\sigma^4}{e} + 0,74569 e \sigma^2$$

$$R_{0,1} = -0,00062 \sigma^2$$

$$R_{3,-1} = 0,6550 e \sigma^2$$

$$S_{0,0} = -0,481236 - 1,987948 e^2 + 3,01338 \sigma^2 + 29,414 e^2 \sigma^2 - 2,801456 e^4$$

$$S_{1,0} = -0,131648 e - 0,529018 e^3 + 2,3534 e \sigma^2 - 1,1768 e^3 \sigma^2$$

$$S_{2,0} = 0$$

$$S_{2,-1} = -1,9556 e^2 + 29,028 e^2 \sigma^2 - 0,9778 e^4$$

$$S_{1,-1} = 0,069011 e + 0,271568 e^3 - 1,65272 e \sigma^2 - 0,82636 e^3 \sigma^2$$

$$S_{0,1} = -0,00062 - 0,00032 e^2$$

$$S_{3,-1} = 0,2184 e^3$$

Pour la première itération nous avons à remplacer dans les quantités ci-dessus e et σ^2 par les valeurs constantes trouvées pour l'orbite de départ. On aura aussi à calculer $\sin(i_1\theta_1 + i_2\theta_2)$ et $\cos(i_1\theta_1 + i_2\theta_2)$. Or on a :

$$\theta_1 = \varphi + s(\varphi) \qquad \theta_2 = \psi$$

φ et ψ étant des fonctions linéaires du temps et $s(\varphi)$ une série trigonométrique en sinus de φ et de ses multiples. On aura donc :

$$\sin(i_1\theta_1 + i_2\theta_2) = \sin(i_1\varphi + i_2\psi) \cos i_1s(\varphi) + \cos(i_1\varphi + i_2\psi) \sin i_1s(\varphi)$$

$$\cos(i_1\theta_1 + i_2\theta_2) = \cos(i_1\varphi + i_2\psi) \cos i_1s(\varphi) - \sin(i_1\varphi + i_2\psi) \sin i_1s(\varphi)$$

Le coefficient le plus grand dans $s(\varphi)$ étant environ $1/3$ on calculera :

$$\cos s(\varphi) = 1 - \frac{s^2(\varphi)}{2!} + \frac{s^4(\varphi)}{4!} - \frac{s^6(\varphi)}{6!}$$

$$\sin s(\varphi) = s(\varphi) - \frac{s^3(\varphi)}{3!} + \frac{s^5(\varphi)}{5!} - \frac{s^7(\varphi)}{7!}$$

en utilisant un programme de multiplication terme à terme de séries trigonométriques. On aura ensuite $\sin 2s(\varphi)$, $\cos 2s(\varphi)$; $\sin 3s(\varphi)$, $\cos 3s(\varphi)$ etc.. par les formules classiques.

Finalement on obtiendra les seconds membres des équations (10) sous forme de séries trigonométriques à deux arguments φ et ψ ; les deux premières équations n'auront que des sinus dans les seconds membres, les deux dernières des cosinus.

En intégrant on aura pour G/G_0 et H/H_0 l'unité (constante d'intégration) augmentée de séries en cosinus de combinaisons linéaires de φ et ψ . Pour θ_1 et θ_2 on aura respectivement

$$\theta_1 = \varphi + \delta\varphi + \text{série en sinus de combinaisons linéaires de } \varphi \text{ et } \psi$$

$$\theta_2 = \psi + \delta\psi + \text{série en sinus de combinaisons linéaires de } \varphi \text{ et } \psi$$

$\delta\varphi$ et $\delta\psi$ sont des fonctions linéaires du temps à coefficients faibles provenant de termes constants formés dans les seconds membres avant l'intégration par des multiplications de cosinus de fonctions linéaires de φ et ψ .

Les quantités $\varphi + \delta\varphi$ et $\psi + \delta\psi$ sont des approximations meilleures que φ et ψ des parties séculaires de θ_1 et θ_2 , nous les désignerons désormais par φ et ψ et nous considérerons que dans les séries trigonométriques trouvées φ et ψ désignent ces valeurs corrigées des arguments initiaux. Cela posé la nouvelle solution est donc de la forme :

$$\begin{aligned} \frac{G}{G_0} &= 1 + C_G(\varphi, \psi) & ; & & \frac{H}{H_0} &= 1 + C_H(\varphi, \psi) \\ \theta_1 &= \varphi + S_{\theta_1}(\varphi, \psi) & ; & & \theta_2 &= \psi + S_{\theta_2}(\varphi, \psi) \end{aligned}$$

C_G et C_H étant des séries de cosinus, S_{θ_1} et S_{θ_2} des séries de sinus. Il faut reporter de nouveau cette solution dans les seconds membres de (10). Pour le calcul de $\sin(i_1\theta_1 + i_2\theta_2)$, $\cos(i_1\theta_1 + i_2\theta_2)$ on procèdera comme plus haut. Ici, en revanche, e et σ^2 ne sont plus des constantes puisque G/G_0 et H/H_0 ne le sont plus, nous aurons besoin de calculer e , e^2 etc.. $\frac{1}{e}$, σ^2 pour obtenir les coefficients $Q_{i_1 i_2}$ etc..

On a d'abord :

$$\frac{G^2}{G_0^2} = \frac{1 - e^2}{1 - e_0^2} \quad \text{d'où} \quad e^2 = 1 - 0,992101 \frac{G^2}{G_0^2}$$

Puis

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} (1 - \cos i) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{H}{G}\right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{H_0}{G_0} \cdot \frac{G_0}{G} \frac{H}{H_0}\right)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (1 - 2\sigma_0^2) \frac{H}{H_0} \cdot \frac{1}{G/G_0}$$

Or $\frac{G}{G_0} = 1 + C_G(\varphi, \psi)$, les coefficients de la série C_G sont très petits si bien que :

$$\frac{1}{G/G_0} \approx 1 - C_G + C_G^2.$$

D'où

$$\sigma^2 = 0,5 - 0,497414 (1 - C_G + C_G^2) \frac{H}{H_0}$$

On voit que l'on peut obtenir e^2 et σ^2 en ayant recours uniquement à des multiplications de séries trigonométriques.

Pour avoir e et $\frac{1}{e}$, et par conséquent des puissances quelconques de e et $\frac{1}{e}$, on fera appel à un procédé itératif classique [12, p.58]. Soit A la valeur de e^2 obtenue, e_0 et $\frac{1}{e_0}$ des valeurs approchées de e et $\frac{1}{e}$ (on prendra celles que l'on avait dans l'itération précédente). On calcule :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (A - e_0^2) \frac{1}{e_0}$$

$$e'_0 = e_0 + \varepsilon$$

$$\frac{1}{e'_0} = \frac{1}{e_0} \left(2 - \frac{1}{e_0} e'_0 \right)$$

puis on recommence le calcul ci-dessus avec les valeurs e'_0 et $\frac{1}{e'_0}$ pour e_0 et $\frac{1}{e_0}$ jusqu'à convergence du processus. On a alors des valeurs définitives e_1 et $\frac{1}{e_1}$ qui sont ici bien entendu des séries trigonométriques. On peut alors calculer $Q_{i_1 i_2}$, $T_{i_1 i_2}$, $R_{i_1 i_2}$, $S_{i_1 i_2}$ puis les seconds membres des équations (10). On intégrera de nouveau.

Il faudra répéter ceci jusqu'à ce que les séries obtenues pour les variables soient identiques à celles obtenues à l'itération précédente à l'approximation donnée près.

Il a fallu huit itérations pour arriver à stabiliser la solution. A titre indicatif nous donnons ici l'évolution, au cours des diverses itérations, des coefficients du temps dans θ_1 , θ_2 (divisés par $n_0 \alpha \text{ m'}$)

1ère itération	2ème	3ème	4ème	5ème	6ème	7ème	8ème
θ_1 0,218337 ; 0,232521 ; 0,228616 ; 0,229400 ; 0,229769 ; 0,229550 ; 0,229617 ; 0,229620							
1ère itération	2ème	3ème	4ème	5ème	6ème	7ème	8ème
θ_2 -0,486766 ; -0,485204 ; -0,485020 ; -0,485408 ; -0,485322 ; -0,485417 ; -0,485328 ; -0,485322							

Le tableau ci-joint donne les résultats définitifs. Il faut y ajouter le terme constant de e qui est 0,086874 et de σ^2 qui est 0,002586. Le coefficient du temps dans θ_1 est 0,229620. $n_0 \alpha \text{ m'}$; dans $\theta_2 = -0,485322$. $n_0 \alpha \text{ m'}$.

Quant à l on l'a calculé en substituant la solution du système (10) dans l'équation :

$$\frac{dl}{dt} = n_0 - \sum \frac{\partial P_{j_1 j_2}}{\partial L} \cos(j_1 g + j_2 h) - \frac{\partial N}{\partial L} = n_0 - \sum \frac{\partial P_{i_1 i_2}}{\partial L} \cos(i_1 \theta_1 + i_2 \theta_2) - \frac{\partial N}{\partial L}$$

et en intégrant

On obtient : $l = (n_0 + \Delta n_0) (t - \tau) + \text{une série en sinus de } i_1 \theta_1 + i_2 \theta_2$

on a trouvé :

$$\Delta n_0 = -0,494933 \cdot n_0 \alpha \text{ m'}$$

Dans le tableau les coefficients des sinus dans les séries représentant les termes angulaires sont donnés en secondes d'arc pour faciliter la comparaison avec les résultats du chapitre 4. Quand, dans le chapitre 4, on substituera la solution que l'on vient d'obtenir dans les seconds membres des équations on conservera ces coefficients en radians. Les coefficients des cosinus dans les séries donnant e et σ^2 sont en radians.

On a noté d'une astérisque dans le tableau, des arguments dont les coefficients ont des valeurs douteuses. En effet il a été impossible d'obtenir la convergence de ces coefficients. Nous avons pensé que les diviseurs petits introduits par certaines combinaisons de φ et ψ (en particulier $2\varphi + \psi$) étaient responsables de ce phénomène et nous avons essayé de refaire les calculs du présent chapitre en double précision en espérant que les erreurs d'arrondi, se reportant très loin, cesseraient de perturber la convergence des coefficients en question. Malgré tout, nous n'avons pas pu conclure et il semble que ces coefficients restent rebelles à ce traitement comme au précédent.

Nous leur avons conservé la valeur qu'ils avaient à la dernière itération. En effet ils ne perturbent pas la convergence des autres coefficients et, comme on le verra dans la suite, n'influent pas sur la solution définitive qu'il s'agisse des termes à longue période ou à courte période. Il y a là cependant un point qu'il faudra élucider un jour.

Pour terminer ce chapitre nous attirons l'attention sur le fait que les perturbations de l et celles de θ_1 sont très souvent presque égales et de signe contraire. Autrement dit les perturbations de la longitude moyenne $l + \varpi$ sont faibles. Ce fait sera confirmé au chapitre 4 à l'issue de l'intégration définitive.

THÉORIE PLANÉTAIRE SEMI-NUMÉRIQUE SANS TERMES SÉCULAIRES

Arguments		Coefficients du sinus			Coefficients du cosinus	
φ	ψ	$1 - n_0(t - \tau)$	θ_1	θ_2	e	σ^2
0	1	- 119	+ 93	- 71	+0,000066	+0,000010
0	2	+ 9	- 8	+ 9	+0,000016	
1	-2	+ 5	- 1	+ 8	-0,000006	
1	-1	- 332	+ 271	+ 880	-0,000278	
1	0	+67553	-66461	+1968	+0,026339	
1	1	+ 290	+ 605	- 6	-0,000278	
1	2	+ 19	- 4	- 24	-0,000006	
2	-2			- 3	+0,000001	
2	-1	- 1998	+ 2009	+3003	-0,000860	
2	0	-10530	+10549	+ 30	-0,002161	
*2	1	- 5433	- 2727	-1889	0,001435	+0,000038
2	2	- 6	- 5	- 9	+0,000002	
3	-2	- 3	+ 3	- 6	-0,000003	
3	-1	+ 674	- 680	- 48	+0,000131	
3	0	+ 2235	- 2262	- 29	+0,000314	
*3	1	- 1426	- 287	- 153	-0,000519	
3	2	- 9			+0,000001	
4	-2	- 9	+ 9	- 12	-0,000002	
4	-1	- 215	+ 216		-0,000029	
4	0	- 512	+ 518	- 52	-0,000043	
*4	1	+ 345	+ 180	+ 8	+0,000123	0,000009
*4	2	+ 75	- 8		-0,000017	
5	-2	+ 6	- 6		+0,000001	
5	-1	+ 68	- 69		+0,000003	
5	0	+ 126	- 134		+0,000016	
*5	1	- 98	- 59	- 2	-0,000025	
5	2	+ 30	+ 4		+0,000008	
6	-2	- 3	+ 3			
6	-1	- 22	+ 22			
6	0	- 33	+ 38	- 3		
6	1	+ 29	+ 18	+ 1		
6	2	- 11				
7	-2	+ 1	- 1			
7	-1	+ 7	- 7			
7	0	+ 9	- 11	+ 1		
*7	1	- 9	- 6			
7	2	+ 4				
8	-1	- 2	+ 2			
8	0	- 2	+ 3			
8	1	+ 3				

CHAPITRE IV — TERMES A COURTE PÉRIODE

Nous allons maintenant substituer la solution trouvée dans les seconds membres des équations complètes du mouvement. Nous prendrons les équations de Lagrange (formules 1 du chapitre 1) qui donneront directement les éléments de l'orbite osculatrice.

L'équation qui donne l est la seule des six équations de Lagrange qui comporte, dans le second membre, un terme autre que ceux du premier ordre par rapport à m' .

On a en effet :

$$\frac{dl}{dt} = n - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e}$$

R est proportionnel à m' mais n est d'ordre zéro par rapport à m' . Pour que l contienne toutes les perturbations du premier ordre il faut donc que n , quand il figure isolément comme premier terme du second membre de l'équation ci-dessus, soit affecté de ses inégalités du premier ordre. Autrement dit, il faut d'abord intégrer l'équation $\frac{da}{dt}$, calculer n par la formule $n^2 a^3 = f$, le porter dans l'équation $\frac{dl}{dt}$ et intégrer.

En fait comme $n^2 a^3 = f$ on a :

$$\frac{1}{n} \frac{dn}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{1}{a} \frac{da}{dt}$$

Nous ajouterons cette septième équation aux six équations de Lagrange et nous l'intégrerons. C'est la valeur de n trouvée alors que nous prendrons comme premier terme du second membre de l'équation en $\frac{dl}{dt}$.

Pour effectuer la substitution de la solution affectée des termes à longue période dans les seconds membres des équations de Lagrange on pourrait songer à développer la fonction perturbatrice sous la forme (3) du chapitre 1 en utilisant les méthodes connues de calcul des coefficients des termes périodiques.

Pour éviter des développements analytiques très longs et comme, d'autre part, on ne sait pas exactement jusqu'où les pousser pour obtenir la précision que l'on s'est fixée nous procéderons autrement. La fonction perturbatrice est, comme nous l'avons vu :

$$R = fm' \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r \cos S}{r'^2} \right)$$

On calculera à partir de cette formule les dérivées partielles $\frac{\partial R}{\partial a}$, $\frac{\partial R}{\partial e}$ etc.. qui figurent dans les seconds membres des équations de Lagrange. On obtiendra ainsi dans ces seconds membres des expressions explicitement fonctions de a , e , i etc.. l , l' . En utilisant le programme de multiplication de séries trigonométriques on remplacera a , e , i .. par les séries obtenues au chapitre 3 et les seconds membres des équations de Lagrange deviendront des séries trigonométriques des quatre arguments l , l' , ϖ , 2Ω (pris dans cet ordre) dont les coefficients, qui seront numériques, auront été calculés à l'approximation désirée. Il suffira alors d'intégrer.

1 - CALCUL DES SECONDS MEMBRES DES EQUATIONS DE LAGRANGE.

Sans détailler complètement des calculs algébriques fastidieux nous allons cependant indiquer comment nous procédons. Soit par exemple à calculer $\frac{\partial R}{\partial e}$. On a :

$$\frac{1}{fm'} \frac{\partial R}{\partial e} = -\frac{1}{\Delta^2} \frac{\partial \Delta}{\partial e} - \frac{\cos S}{r'^2} \frac{\partial r}{\partial e} - \frac{r}{r'^2} \frac{\partial}{\partial e} (\cos S)$$

(r' ne dépend évidemment pas de e)

or

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos S$$

$$\Delta \frac{\partial \Delta}{\partial e} = r \frac{\partial r}{\partial e} - r' \cos S \frac{\partial r}{\partial e} - rr' \frac{\partial}{\partial e} (\cos S)$$

et

$$\cos S = \cos^2 \frac{i}{2} \cos(v - v' + \varpi) + \sin^2 \frac{i}{2} \cos(v + v' + \varpi - 2\Omega)$$

v et v' étant les anomalies vraies de Vesta et de Jupiter respectivement. On posera dans toute la suite :

$$A = v - v' + \varpi$$

$$B = v + v' + \varpi - 2\Omega$$

$$\sigma^2 = \sin^2 \frac{i}{2}$$

D'où :

$$\cos S = (1 - \sigma^2) \cos A + \sigma^2 \cos B$$

$$\frac{\partial}{\partial e} (\cos S) = -[(1 - \sigma^2) \sin A + \sigma^2 \sin B] \frac{\partial v}{\partial e}$$

en effet

$$\frac{\partial A}{\partial e} = \frac{\partial B}{\partial e} = \frac{\partial v}{\partial e}$$

or on a :

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}$$

E étant l'anomalie excentrique de Vesta

Donc :

$$\frac{1}{\cos^2 \frac{v}{2}} \frac{\partial v}{\partial e} = \frac{1}{\cos^2 \frac{E}{2}} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{\partial E}{\partial e} + 2 \operatorname{tg} \frac{E}{2} \cdot \frac{\sqrt{1-e}}{\sqrt{1+e(1-e)^2}}$$

on a :

$$\cos^2 \frac{v}{2} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{v}{2}} = \frac{(1-e) \cos^2 \frac{E}{2}}{1 - e \cos E}$$

et l'équation de Képler

$$E - e \sin E = l \quad \text{donne} \quad \frac{\partial E}{\partial e} = \frac{\sin E}{1 - e \cos E}$$

D'où

$$\frac{\partial v}{\partial e} = + \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{(1 - e \cos E)^2} + \frac{\sin E}{\sqrt{1 - e^2} (1 - e \cos E)}$$

or

$$r = a(1 - e \cos E)$$

$$r \sin v = a \sqrt{1 - e^2} \sin E \quad \text{Donc} \quad \frac{\partial v}{\partial e} = \left(\frac{a}{r} + \frac{1}{1 - e^2} \right) \sin v$$

Nous avons besoin aussi de

$$\frac{\partial r}{\partial e} = -a \cos E + ae \sin E \frac{\partial E}{\partial e} = a \frac{e - \cos E}{1 - e \cos E}$$

or

$$r \cos v = a(\cos E - e)$$

Donc

$$\frac{\partial r}{\partial e} = -a \cos v$$

D'où finalement :

$$\frac{1}{f m'} \frac{\partial R}{\partial e} = -a \cos v \left(\frac{r' \cos S - r}{\Delta^3} - \frac{\cos S}{r'^2} \right) + \left(\frac{a}{r} + \frac{1}{1 - e^2} \right) \left(\frac{r}{r'^2} - \frac{r r'}{\Delta^3} \right) \\ [(1 - \sigma^2) \sin A + \sigma^2 \sin B] \sin v$$

On procéderait ainsi pour les autres dérivées de R.

On posera :

$$C_1 = (1 - \sigma^2) \sin A + \sigma^2 \sin B$$

$$C_2 = \sin B - \sin A$$

$$C_3 = \cos A - \cos B$$

$$W_1 = \alpha \left(\frac{a'}{\Delta} \right)^3 \left(\frac{r'}{a'} \cos S - \alpha \frac{r}{a} \right) - \alpha \frac{a'^2}{r'^2} \cos S$$

$$W_2 = \alpha \frac{r}{a} \cdot \frac{a'^2}{r'^2} - \frac{r}{a} \cdot \frac{r'}{a'} \cdot \alpha \cdot \left(\frac{a'}{\Delta} \right)^3$$

(rappelons que $\alpha = a/a'$)

Les équations de Lagrange prendront alors la forme suivante :

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} = 2n\alpha m' \left[\frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \sin v \cdot W_1 + \frac{a^2}{r^2} \sqrt{1-e^2} \cdot C_1 \cdot W_2 \right]$$

$$\frac{1}{n} \frac{dn}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{1}{a} \cdot \frac{da}{dt}$$

$$\frac{de}{dt} = n\alpha m' \frac{1-e^2}{e} \left[\frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \sin v \cdot W_1 + \frac{a^2}{r^2} \sqrt{1-e^2} C_1 W_2 \right] - n\alpha m' \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} C_1 W_2 \quad (10)$$

$$\frac{d\sigma^2}{dt} = n\alpha m' \frac{\sigma^2(1-\sigma^2)}{\sqrt{1-e^2}} C_2 W_2$$

$$\frac{d(2\Omega)}{dt} = n\alpha m' \frac{C_3 W_2}{\sqrt{1-e^2}}$$

$$\frac{d\overline{\omega}}{dt} = n\alpha m' \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \left[-\cos v \cdot W_1 + \left(\frac{a}{r} + \frac{1}{1-e^2} \right) \sin v C_1 W_2 \right] + n\alpha m' \frac{\sigma^2}{\sqrt{1-e^2}} C_3 W_2$$

$$\frac{dl}{dt} = n - 2n\alpha m' \frac{r}{a} W_1 - n\alpha m' \frac{1-e^2}{e} \left[-\cos v W_1 + \left(\frac{a}{r} + \frac{1}{1-e^2} \right) \sin v \cdot C_1 W_2 \right]$$

2 - CALCUL DES SERIES FIGURANT DANS LES SECONDS MEMBRES DES EQUATIONS DE LAGRANGE.

On appliquera la méthode suivie dans l'intégration des termes à longue période. On ramènera tous les calculs à des multiplications ou des sommes de séries trigonométriques. En ce qui concerne Jupiter, son mouvement étant képlérien, on calculera les développements connus du problème des deux corps et l'on aura :

$$v' = l' + 0,096842 \sin l' + 0,00293 \sin 2l' + 0,000123 \sin 3l' + 0,000006 \sin 4l'$$

$$\frac{r'}{a'} = 1,001173 - 0,048151 \cos l' - 0,001171 \cos 2l' - 0,000043 \cos 3l' - 0,000002 \sin 4l'$$

$$\frac{r'^2}{a'^2} = 1,003519 - 0,096842 \cos l' - 0,001172 \cos 2l' - 0,000028 \cos 3l' - 0,000001 \cos 4l'$$

$$\frac{a'^2}{r'^2} = 1,001175 + 0,096956 \cos l' + 0,005867 \cos 2l' + 0,000369 \cos 3l' + 0,000024 \cos 4l'$$

$$\cos v' = -0,048435 + 0,997361 \cos l' + 0,048284 \cos 2l' + 0,002630 \cos 3l' + 0,000151$$

$$\cos 4l' + 0,000009 \cos 5l' + 0,000001 \cos 6l'$$

$$\sin v' = 0,997948 \sin l' + 0,048303 \sin 2l' + 0,002630 \sin 3l' + 0,000151 \sin 4l' + 0,000009$$

$$+ 0,000009 \sin 5l' + 0,000001 \sin 6l'$$

Pour Vesta on procèdera ainsi. Nous avons obtenu :

$$l = \bar{l} + S_l(\varphi, \psi)$$

$\bar{l}$ étant une fonction linéaire du temps et $S_l(\varphi, \psi)$ une série trigonométrique en φ et ψ .

On en déduit :

$$\sin l = \sin \bar{l} \cos S_l + \cos \bar{l} \sin S_l$$

on calculera $\sin S_l$ et $\cos S_l$ au moyen de leurs développements en série de Taylor ce qui conduit à calculer les différentes puissances de la série S_l . $\sin \bar{l}$ et $\cos \bar{l}$ seront deux séries de Fourier réduites chacune à un terme. Ayant $\sin l$, puis $\cos l$ on aura $\sin 2l$, $\cos 2l$ etc., puis

$$v = l + \left(2e - \frac{e^3}{4} + \dots\right) \sin l + \left(\frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4 + \dots\right) \sin 2l + \dots$$

ainsi que $\cos v$ et $\sin v$.

D'où

$$\frac{r}{a} = \frac{1 - e^2}{1 + e \cos v} = (1 - e^2) (1 - e \cos v + e^2 \cos^2 v - e^3 \cos^3 v + \dots)$$

$$\frac{a}{r} = \frac{1}{1 - e^2} (1 + e \cos v) \quad ; \quad \frac{1}{1 - e^2} = 1 + e^2 + e^4 + \dots$$

$$\sqrt{1 - e^2} = 1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 \dots \quad ; \quad \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} = 1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \dots$$

De même :

$$A = v - v' + \varpi = l - l' + \varphi + \text{une série en } l, l', \varphi, \psi$$

$$B = v + v' + \varpi - 2\Omega = l + l' + \varphi - \psi + \text{une série en } l, l', \varphi, \psi$$

ce qui permettra de calculer $\cos A$, $\cos B$, $\sin A$, $\sin B$ et donc $\cos S$, C_1 , C_2 , C_3 .

3 - CALCUL DE a'/Δ .

On voit que dans les expressions de W_1 et W_2 figure $(a'/\Delta)^3$. Nous pouvons obtenir facilement :

$$\frac{\Delta^2}{a'^2} = \alpha^2 \frac{r^2}{a^2} + \frac{r'^2}{a'^2} - 2\alpha \frac{r}{a} \frac{r'}{a'} \cos S = 0,206048 \frac{r^2}{a^2} + \frac{r'^2}{a'^2} - 0,907850 \frac{r}{a} \frac{r'}{a'} \cos S$$

sous forme d'une série en l, l', φ et ψ .

Pour calculer $\frac{a'}{\Delta}$ nous emploierons la méthode suivante [6, p.195].

Soit $\frac{1}{\delta_0}$ une valeur approchée de $\frac{a'}{\Delta}$. On posera

$$\frac{1}{\delta} = \frac{1}{\delta_0} (1 + \varepsilon)$$

D'où

$$\frac{1}{\delta^2} = \frac{1}{\delta_0^2} (1 + 2\varepsilon)$$

en négligeant ε^2 . D'où :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\delta^2}{\delta_0^2} \right)$$

On voit que le calcul de ε se ramène à des multiplications de séries. On en déduira une valeur meilleure de $1/\delta$ et l'on reconduira le processus jusqu'à obtenir la convergence.

La valeur de départ $1/\delta_0$ choisie sera calculée en partant du problème des orbites circulaires coplanaires. Si en effet on fait $e = e' = \sigma^2 = 0$, on a :

$$\frac{\Delta^2}{a'^2} = 1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(\bar{l} - l' + \varphi)$$

on sait que [2, tome I p. 270] :

$$\frac{1}{\delta_0} = \frac{a'}{\Delta} = \frac{1}{2} b_0 + b_1 \cos(\bar{l} - l' + \varphi) + b_2 \cos 2(\bar{l} - l' + \varphi) + b_3 \cos 3(\bar{l} - l' + \varphi) + \dots$$

les fonctions b_0, b_1, b_2 etc.. étant des fonctions de α dont les développements en α sont connus. On obtient finalement :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta_0} = & 1,058487 + 0,494323 \cos(\bar{l} - l' + \varphi) + 0,169930 \cos 2(\bar{l} - l' + \varphi) + 0,064601 \cos 3(\bar{l} - l' + \varphi) \\ & + 0,025741 \cos 4(\bar{l} - l' + \varphi) + 0,010549 \cos 5(\bar{l} - l' + \varphi) + 0,004419 \cos 6(\bar{l} - l' + \varphi) \\ & + 0,001912 \cos 7(\bar{l} - l' + \varphi) \end{aligned}$$

Nous nous sommes limités au termes en $7(\bar{l} - l' + \varphi)$.

Le nombre d'itérations nécessaires pour avoir $\frac{a'}{\Delta}$ avec la précision désirée a été de huit. La série $\frac{1}{\delta_0}$ avait huit termes, à la fin de la dernière itération la série $\frac{1}{\delta}$ obtenue en avait près de quatre milles. Ceci montre bien que, du point de vue des calculs, l'obtention de l'inverse de la distance des deux corps, est une des principales difficultés des théories planétaires.

a'/Δ étant calculé on a facilement $(a'/\Delta)^3$ série qui comporte évidemment un grand nombre de termes. On aurait pu simplifier les calculs en multipliant par la petite quantité m' mais on a préféré conserver le facteur nam' explicitement. En intégrant les seconds membres de (10) on fera en effet apparaître nam' en facteur des coefficients du temps, cette quantité disparaîtra d'elle-même et l'on n'aura aucune perte de précision.

4 - INTEGRATION ET RESULTATS.

Les seconds membres des équations (10) étant calculés comme il est indiqué plus haut se présenteront sous la forme de séries trigonométriques d'arguments $\bar{l}, l', \varphi$ et ψ ; ces séries seront des séries de sinus pour les quatre premières équations, des séries de cosinus pour les trois dernières; nam' sera en facteur des coefficients numériques. Naturellement on prendra $n = n_0$. Les coefficients du temps dans les arguments seront alors respectivement :

Pour $\bar{l}$	2306,8356 . $n_0 \alpha m'$	(c'est $n_0 - 0,494933 n_0 \alpha m'$)
" l'	705,96932 . $n_0 \alpha m'$	
" φ	0,229620 . $n_0 \alpha m'$	
" ψ	-0,485322 . $n_0 \alpha m'$	

On intégrera terme à terme les séries. Les constantes d'intégration seront 1 pour les équations $\frac{1}{a_0} \frac{da}{dt}$ et $\frac{1}{n_0} \frac{dn}{dt}$. Pour les équations en $\frac{de}{dt}$ et $\frac{d\sigma^2}{dt}$ on prendra les valeurs moyennes de e et σ^2 trouvées à l'issu de l'intégration des termes à longue période. Quant aux variables angulaires les constantes d'intégration viendront se fondre dans la partie séculaire des seconds membres.

Les résultats sont donnés ci-dessous. Les coefficients sont en unité astronomique pour a , en radians pour e et σ^2 . Enfin les coefficients sont donnés en secondes dans les séries représentant les éléments angulaires.

On constate que l'on retrouve les termes à longue période presque identiques à ce qu'ils étaient avant l'intégration complète ; le fait que leurs coefficients aient varié quelque peu n'est pas surprenant puisque nous sommes partis ici de la fonction perturbatrice complète et non plus d'une expression approchée. Il y a deux causes au changement des coefficients en question : La "partie séculaire" de la fonction perturbatrice que nous avons utilisée au chapitre 3 était prise dans le travail de Perrotin. Elle se limitait à des termes du 6ème ordre (en considérant e et σ comme des infiniment petits du 1er ordre) parce que les termes d'ordre supérieur étaient négligeables, mais au cours des dérivations et divisions par e qui figurent dans nos calculs des termes du 7ème ordre auraient pu donner des termes de 5ème ordre qui auraient légèrement modifié les résultats. D'autre part, les termes à courte période de la fonction perturbatrice peuvent donner naissance à des termes à longue période dont les coefficients, du second ordre en m' avant l'intégration, sont du premier ordre en m' après l'intégration. On remarquera que le coefficient de $\sin \varphi$ dans a a subi de ce fait une variation d'un demi-degré. Les autres coefficients ont varié beaucoup moins. En ce qui concerne les coefficients des termes à courte période on voit qu'ils sont égaux à ceux trouvés par Perrotin pour le même problème, moyennant la réserve que nous avons faite sur la précision.

Il faut ajouter aux termes périodiques qui figurent dans les tableaux, les termes constants pour les éléments métriques, qui sont :

$$\text{pour } a : 2,3617 \text{ U.A.} \quad ; \quad \text{pour } e : 0,086874 \quad ; \quad \text{pour } \sigma^2 : 0,002586$$

et les termes séculaires des éléments angulaires dont les coefficients du temps sont respectivement :

$$\text{pour } l : n_0 - 0,495389 n_0 \alpha m' = 977,846 \quad ; \quad \text{pour } \omega : 0,229745 . n_0 \alpha m' = 35,60 \text{ par an}$$

$$\text{pour } 2\Omega : -0,485597 . n_0 \alpha m' = -75,25 \text{ par an.}$$

THÉORIE PLANÉTAIRE SEMI-NUMÉRIQUE SANS TERMES SÉCULAIRES

Arguments				Coefficients du sinus		
$\bar{l}$	l'	φ	ψ	l	ϖ	2Ω
0	0	0	+1	- 127		- 44
0	0	0	+2		- 6	
0	0	+1	-2	+ 2		
0	0	+1	-1	- 361	+ 362	+ 860
0	0	+1	0	+70658	-69461	+2203
0	0	+1	+1	+ 250		
0	0	+1	+2	+ 16		
0	0	+2	-1	- 2033	+ 2028	+3030
0	0	+2	0	-10944	+10953	- 2
0	0	+2	+1	- 5685		
0	0	+2	+2	- 43	+ 43	
0	0	+3	-2		+ 5	- 7
0	0	+3	-1	+ 710	- 709	- 45
0	0	+3	0	+ 2337	- 2329	+ 6
0	0	+3	+1	- 1469		
0	0	+4	-2		+ 4	- 11
0	0	+4	-1	- 225	+ 225	
0	0	+4	0	- 572	+ 564	+ 12
0	0	+4	+1	+ 357		
0	0	+4	+2	- 81		
0	0	+5	-2		- 3	
0	0	+5	-1	+ 71	- 71	
0	0	+5	0	+ 135	- 135	- 22
0	0	+5	+1	- 107		
0	0	+5	+2	+ 111		
0	0	+6	-2		+ 2	
0	0	+6	-1	- 16	+ 17	
0	0	+6	0	- 22	+ 22	+ 9
0	0	+6	+1	+ 52		
0	0	+6	+3	+ 34		
0	0	+7	-2		- 1	
0	0	+7	-1		- 5	
0	0	+7	0		- 4	- 3
0	0	+7	+1	- 14		
0	0	+8	-1		+ 1	
0	0	+8	+1	+ 3		
0	+1	-6	-1		- 1	
0	+1	-6	0	- 1	+ 1	
0	+1	-5	-1	- 1	+ 2	
0	+1	-5	0	+ 4	- 3	
0	+1	-5	+1	+ 1	- 1	
0	+1	-4	-1	+ 3	- 3	
0	+1	-4	0	- 11	+ 11	
0	+1	-4	+1	- 2	+ 2	
0	+1	-3	-1	- 6	+ 6	
0	+1	-3	0	+ 36	- 36	
0	+1	-3	+1	+ 4	- 4	
0	+1	-2	-1	+ 2	- 2	
0	+1	-2	0	- 111	+ 111	
0	+1	-2	+1		- 1	

Arguments				Coefficients du sinus		
$\bar{l}$	l'	φ	ψ	l	$\overline{m}$	2Ω
0	+1	-1	-1		+	1
0	+1	-1	0	+	383	- 367 + 41
0	+1	-1	+1		+	1
0	+1	0	-1			- 7
0	+1	0	0	-	18	+ 9 - 14
0	+1	0	+1	+	1	- 1
0	+1	+1	-1	+	8	- 8 - 22
0	+1	+1	0	+	2	- 2
0	+1	+1	+1	-	1	+ 2 + 1
0	+1	+2	-1	-	3	+ 3 + 1
0	+1	+2	+1	+	2	- 2
0	+1	+3	-1		-	1
0	+1	+3	+1		+	1
0	+2	-6	0	-	1	+ 1
0	+2	-5	-1		+	1
0	+2	-5	0	+	4	- 4
0	+2	-5	+1		-	1
0	+2	-4	-1	+	2	- 2
0	+2	-4	0	-	13	+ 13
0	+2	-4	+1	-	1	+ 1
0	+2	-3	0	+	42	- 42
0	+2	-2	0	-	134	+ 132 - 3
0	+2	-1	-1			+ 1
0	+2	-1	0	-	15	+ 15 + 2
0	+2	-1	+1		-	1
0	+2	0	-1			+ 70
0	+2	0	+1	-	1	+ 1
0	+2	+1	-1		-	1
0	+2	+1	+1		+	1
0	+2	+2	-2			- 1
0	+3	-5	0	+	1	- 1
0	+3	-4	0	-	4	+ 4
0	+3	-3	0	+	12	- 11
0	+3	-2	-1		+	1
0	+3	-2	0	-	11	+ 11
0	+3	-1	-1	+	2	- 2 - 6
0	+3	-1	0	-	2	+ 2
0	+3	0	-1			+ 7
0	+4	-4	0		+	1
0	+4	-3	0	+	1	- 1
0	+4	-2	0		+	1
0	+4	-1	-1			- 1
0	+4	0	-1			+ 1
+1	-5	+1	+1			- 1
+1	-5	+2	0		+	1
+1	-5	+2	+1		+	1
+1	-5	+3	0	+	4	- 3 + 2
+1	-5	+3	+1		-	1
+1	-5	+4	0	-	5	+ 5
+1	-5	+5	0	+	4	- 4

THÉORIE PLANÉTAIRE SEMI-NUMÉRIQUE SANS TERMES SÉCULAIRES

Arguments				Coefficients du sinus		
$\bar{l}$	l'	φ	ψ	l	$\bar{\omega}$	2Ω
+1	-5	+6	0	-	1	
+1	-4	-1	-1		+	1
+1	-4	0	-1		-	1
+1	-4	0	0			+ 1
+1	-4	0	+1			+ 1
+1	-4	+1	-1	+	1	-
+1	-4	+1	+1			- 21
+1	-4	+2	-1	-	3	+
+1	-4	+2	0	-	27	+
+1	-4	+2	+1	-	7	+
+1	-4	+3	-1	+	1	-
+1	-4	+3	0	+	78	-
+1	-4	+3	+1	+	2	-
+1	-4	+3	+2			+ 1
+1	-4	+4	-1		+	1
+1	-4	+4	0	-	68	+
+1	-4	+4	+1		-	1
+1	-4	+5	-1		-	1
+1	-4	+5	0	+	21	-
+1	-4	+5	+1	-	3	+
+1	-4	+6	-1		+	1
+1	-4	+6	0	-	7	+
+1	-4	+6	+1	+	2	-
+1	-4	+7	-1		-	1
+1	-4	+7	0	+	2	-
+1	-4	+8	0		+	1
+1	-3	-3	-1	+	1	-
+1	-3	-2	-1	-	4	+
+1	-3	-2	0			+ 1
+1	-3	-1	-1	+	13	-
+1	-3	-1	0			+ 7
+1	-3	-1	+1	-	2	+
+1	-3	-4	+2			- 2
+1	-3	0	-1		+	1
+1	-3	0	0		-	1
+1	-3	0	+1	+	5	-
+1	-3	0	+2			- 13
+1	-3	+1	-1	-	33	+
+1	-3	+1	0	+	54	+
+1	-3	+1	+1	-	25	-
+1	-3	+2	-1	+	15	-
+1	-3	+2	0	+	1087	-
+1	-3	+2	+1	-	5	+
+1	-3	+2	+2			+ 5
+1	-3	+3	-1	-	4	+
+1	-3	+3	0	-	1458	+
+1	-3	+3	+1	+	9	-
+1	-3	+3	+2			- 7
+1	-3	+4	-1	+	9	-
+1	-3	+4	0	+	411	-

Arguments				Coefficients du sinus		
l	l'	q	ϵ	l	$\overline{w}$	2Ω
+1	-3	+4	+1	- 40	+ 40	- 1
+1	-3	+4	+2			- 2
+1	-3	+5	-1	- 16	+ 16	
+1	-3	+5	0	- 131	+ 131	
+1	-3	+5	+1	+ 49	- 48	
+1	-3	+6	-1	+ 9	- 9	
+1	-3	+6	0	+ 41	- 41	
+1	-3	+6	+1	- 10	+ 10	
+1	-3	+6	+2	+ 1	- 1	
+1	-3	+7	-1	- 4	+ 4	
+1	-3	+7	0	- 13	+ 13	
+1	-3	+7	+1	+ 1	- 1	
+1	-3	+7	+2	- 1	+ 1	
+1	-3	+8	-1	+ 2	- 2	
+1	-3	+8	0	+ 4	- 4	
+1	-3	+9	-1		+ 1	
+1	-3	+9	0	- 1	+ 1	
+1	-2	-4	-1		+ 1	
+1	-2	-3	-1	+ 2	- 2	
+1	-2	-2	-1	- 5	+ 5	
+1	-2	-2	+1		- 1	
+1	-2	-1	-1	+ 15	- 15	
+1	-2	-1	+1	- 2	+ 2	
+1	-2	0	-1	+ 23	- 19	+ 2
+1	-2	0	0	+ 3	- 3	
+1	-2	0	+1	+ 5	- 5	- 14
+1	-2	+1	-1	- 6	+ 6	
+1	-2	+1	0	+ 5	+ 12	- 8
+1	-2	+1	+1		- 1	- 6
+1	-2	+2	-1	+ 1	- 1	
+1	-2	+2	0	+ 1518	- 1399	+ 44
+1	-2	+2	+1	- 3	+ 3	
+1	-2	+3	-1	+ 2	- 2	
+1	-2	+3	0	- 438	+ 438	
+1	-2	+3	+1	+ 11	- 11	
+1	-2	+4	-1	+ 14	- 14	
+1	-2	+4	0	+ 140	- 140	
+1	-2	+4	+1	- 55	+ 54	- 1
+1	-2	+5	-1	- 9	+ 9	
+1	-2	+5	0	- 45	+ 45	
+1	-2	+5	+1	+ 16	- 17	
+1	-2	+6	-1	+ 4	- 4	
+1	-2	+6	0	+ 13	- 13	
+1	-2	+6	+1	- 5	+ 5	
+1	-2	+6	+2	+ 1	- 1	
+1	-2	+7	-1	- 2	+ 2	
+1	-2	+7	0	- 4	+ 4	
+1	-2	+7	+1	+ 2	- 2	
+1	-2	+7	+2		+ 1	
+1	-2	+8	-1		- 1	

THÉORIE PLANÉTAIRE SEMI-NUMÉRIQUE SANS TERMES SÉCULAIRES

Arguments				Coefficients du sinus			
$\bar{l}$	l'	φ	ψ	l	ϖ	2Ω	
+1	-2	+8	0				
+1	-2	+8	+1				
+1	-1	-3	0				
+1	-1	-2	0				
+1	-1	-1	-1				
+1	-1	-1	0				
+1	-1	-1	+1				
+1	-1	0	0				
+1	-1	+1	0				
+1	-1	+2	0				
+1	-1	+3	-1				
+1	-1	+3	0				
+1	-1	+3	+1				
+1	-1	+4	0				
+1	-1	+4	+1				
+1	0	-4	-1				
+1	0	-4	0				
+1	0	-3	-1				
+1	0	-3	0				
+1	0	-3	+1				
+1	0	-2	0				
+1	0	-2	+1				
+1	0	-1	0				
+1	0	0	0				
+1	0	0	+1				
+1	0	+1	-1				
+1	0	+1	+1				
+1	0	+2	-1				
+1	0	+2	+1				
+1	0	+3	-1				
+1	+1	-3	0				
+1	+1	-2	0				
+1	+1	-1	0				
+1	+1	0	0				
+1	+1	+1	-1				
+1	+2	-2	0				
+1	+2	-1	0				
+1	+2	0	-1				
+1	+2	+1	-1				
+2	-7	+3	+1				
+2	-7	+4	0				
+2	-7	+4	+1				
+2	-7	+5	0				
+2	-7	+5	+1				
+2	-7	+6	0				
+2	-7	+7	0				
+2	-7	+8	0				
+2	-6	+2	+1				
+2	-6	+3	-1				
+2	-6	+3	0				

Arguments				Coefficients du sinus			
$\bar{l}$	l'	φ	Φ	l	ϖ	2ϖ	
+2	-6	+3	+1	+	2	-	2
+2	-6	+4	-1	-	1	+	1
+2	-6	+4	0	-	14	+	14
+2	-6	+4	+1	-	2	+	2
+2	-6	+5	0	+	20	-	20
+2	-6	+6	0	-	13	+	13
+2	-6	+6	+1			-	1
+2	-6	+7	0	+	4	-	4
+2	-6	+7	+1			+	1
+2	-6	+8	0	-	1	+	1
+2	-5	+2	-1	-	1	+	1
+2	-5	+2	+1				
+2	-5	+3	-1	+	2	-	2
+2	-5	+3	0	+	14	-	13
+2	-5	+3	+1	+	2	-	2
+2	-5	+4	-1			+	1
+2	-5	+4	0	-	37	+	36
+2	-5	+5	0	+	31	-	30
+2	-5	+5	+1			+	1
+2	-5	+6	0	-	10	+	10
+2	-5	+6	+1	+	2	-	2
+2	-5	+7	0	+	3	-	3
+2	-5	+7	+1	-	1	+	1
+2	-5	+8	0			+	1
+2	-4	0	-1	+	2	-	2
+2	-4	0	0				
+2	-4	+1	-1			-	1
+2	-4	+1	+1				
+2	-4	+2	-1	-	5	+	5
+2	-4	+2	0	-	2		
+2	-4	+2	+1			-	1
+2	-4	+3	-1	+	2	-	2
+2	-4	+3	0	+	77	-	70
+2	-4	+3	+1				
+2	-4	+4	-1			+	1
+2	-4	+4	0	-	109	+	104
+2	-4	+4	+1			-	1
+2	-4	+4	+2				
+2	-4	+5	-5			-	1
+2	-4	+5	0	+	33	-	33
+2	-4	+5	+1	-	5	+	5
+2	-4	+6	-1	-	1	+	1
+2	-4	+6	0	-	10	+	10
+2	-4	+6	+1	+	6	-	6
+2	-4	+7	-1			-	1
+2	-4	+7	0	+	3	-	3
+2	-4	+7	+1			+	1
+2	-4	+8	0			+	1
+2	-3	-1	-1	-	1	+	1

THÉORIE PLANÉTAIRE SEMI-NUMÉRIQUE SANS TERMES SÉCULAIRES

Arguments				Coefficients du sinus		
$\bar{l}$	l'	φ	ψ	l	ϖ	2Ω
+2	-3	0	-1			
+2	-3	+1	-1	+ 4	- 4	
+2	-3	+1	+1	+ 9	- 9	+ 1
+2	-3	+2	-1		- 1	- 2
+2	-3	+2	0	- 3	+ 3	
+2	-3	+2	+1	- 11	- 6	- 7
+2	-3	+3	-1			- 1
+2	-3	+3	0	+ 1	- 1	
+2	-3	+3	+1	+ 296	- 273	+ 12
+2	-3	+4	0		+ 1	
+2	-3	+4	+1	- 85	+ 85	
+2	-3	+4	+1	+ 3	- 3	
+2	-3	+5	-1	+ 3	- 3	
+2	-3	+5	0	+ 27	- 27	
+2	-3	+5	+1	- 17	+ 16	
+2	-3	+6	-1	- 2	+ 2	
+2	-3	+6	0	- 9	+ 9	
+2	-3	+6	+1	+ 4	- 4	
+2	-3	+7	-1		- 1	
+2	-3	+7	0	+ 3	- 3	
+2	-3	+7	+1		+ 1	
+2	-3	+7	+2		- 1	
+2	-3	+8	0		+ 1	
+2	-2	0	-1	- 2	- 2	- 2
+2	-2	0	0	- 1	+ 1	
+2	-2	+1	0	+ 5	- 3	+ 1
+2	-2	+2	0	- 48	- 45	- 39
+2	-2	+3	-1			- 1
+2	-2	+3	0	- 9	+ 9	
+2	-2	+4	-1		+ 1	+ 1
+2	-2	+4	0	+ 3	- 3	
+2	-2	+4	+1	+ 2	+ 2	+ 2
+2	-2	+5	0		+ 1	
+2	-1	-2	0		+ 1	
+2	-1	-1	0	+ 2	- 2	
+2	-1	0	0	- 5	+ 5	
+2	-1	+1	0	+ 16	- 15	+ 2
+2	-1	+2	-1			+ 1
+2	-1	+2	0		+ 1	
+2	-1	+3	-1	+ 2	- 2	- 6
+2	-1	+3	+1		+ 1	
+2	-1	+4	-1		+ 1	
+2	0	0	-2			+ 1
+2	0	0	0		- 1	
+2	0	+1	0	+ 1	- 1	
+2	0	+2	-1			+ 21
+2	0	+4	0			- 1
+2	+1	+1	-1			- 1
+2	+1	+2	-1			+ 1
+3	-8	+6	0		- 1	
+3	-8	+7	0		+ 1	

Arguments				Coefficients du sinus		
$\bar{l}$	l'	q	q	l	$\bar{q}$	2Ω
+3	-8	+8	0		- 1	
+3	-7	+4	0		- 1	
+3	-7	+4	+1			- 1
+3	-7	+5	0	- 3	+ 3	
+3	-7	+6	0	+ 4	- 4	
+3	-7	+7	0	- 2	+ 2	
+3	-7	+8	0		- 1	
+3	-6	+3	-1		+ 1	
+3	-6	+3	+1			+ 2
+3	-6	+4	-1		- 1	
+3	-6	+4	0	+ 5	- 4	
+3	-6	+4	+1			- 1
+3	-6	+5	0	- 12	+ 12	
+3	-6	+6	0	+ 10	- 10	
+3	-6	+7	0	- 3	+ 3	
+3	-6	+7	+1		- 1	
+3	-6	+8	0		- 1	
+3	-6	+8	+1		+ 1	
+3	-5	+1	-1		- 1	
+3	-5	+2	-1		- 1	
+3	-5	+3	-1	- 2	+ 2	
+3	-5	+3	0		- 1	
+3	-5	+3	+1			+ 4
+3	-5	+4	-1		- 1	
+3	-5	+4	0	+ 27	- 24	+ 1
+3	-5	+5	0	- 37	+ 36	- 1
+3	-5	+6	0	+ 11	- 11	
+3	-5	+6	+1	- 2	+ 2	
+3	-5	+7	0	- 4	+ 4	
+3	-5	+7	+1	+ 3	- 3	
+3	-5	+8	0	+ 1	- 1	
+3	-4	0	-1		+ 1	
+3	-4	+1	-1	+ 2	- 2	
+3	-4	+1	0		- 1	
+3	-4	+2	-1	+ 4	- 4	
+3	-4	+2	0	- 2	+ 2	
+3	-4	+3	-1	- 2	+ 2	
+3	-4	+3	0		- 6	- 3
+3	-4	+4	-1		- 1	
+3	-4	+4	0	+ 91	- 83	+ 5
+3	-4	+5	0	- 26	+ 26	
+3	-4	+5	+1		- 1	
+3	-4	+6	-1	+ 1	- 1	
+3	-4	+6	0	+ 8	- 8	
+3	-4	+6	+1	- 7	+ 7	
+3	-4	+7	-1		+ 1	
+3	-4	+7	0	- 3	+ 3	
+3	-4	+7	+1	+ 1	- 1	
+3	-4	+8	0		- 1	

THÉORIE PLANÉTAIRE SEMI-NUMÉRIQUE SANS TERMES SÉCULAIRES

Arguments				Coefficients du sinus					
$\bar{l}$	l	φ	ψ	l		ϖ		2Ω	
+3	-3	0	0	-	1	+	1		
+3	-3	+1	-1			-	2	-	1
+3	-3	+1	0	+	4	-	4		
+3	-3	+2	0	-	13	+	13		
+3	-3	+3	0			-	29	-	14
+3	-3	+4	0	-	5	+	5		
+3	-3	+4	+1			-	1		
+3	-3	+5	-1					+	1
+3	-3	+5	0	+	2	-	2		
+3	-3	+5	+1			+	2	+	1
+3	-3	+6	0			+	1		
+3	-2	-2	0			+	1		
+3	-2	-1	0	+	2	-	2		
+3	-2	0	-1	-	3	+	3		
+3	-2	0	0	-	7	+	7		
+3	-2	0	+1			+	1		
+3	-2	+1	0	+	22	-	22		
+3	-2	+2	0	-	66	+	63	-	1
+3	-2	+2	+1			-	1		
+3	-2	+3	-1					+	1
+3	-2	+3	0			+	1		
+3	-2	+3	+1	-	2	+	2		
+3	-2	+4	-1			-	1	-	3
+3	-2	+4	+1	+	4	-	4		
+3	-2	+5	+1			-	1		
+3	-1	+2	0	+	2	-	2		
+3	-1	+3	-1					+	8
+3	0	+2	-1					+	1
+3	0	+3	-1					+	1
+4	-8	+6	0	-	1	+	1		
+4	-8	+7	0	+	2	-	2		
+4	-8	+8	0			+	1		
+4	-7	+4	+1					+	1
+4	-7	+5	0	+	2	-	2		
+4	-7	+5	+1					-	1
+4	-7	+6	0	-	5	+	5		
+4	-7	+7	0	+	4	-	4		
+4	-7	+8	0	-	1	+	1		
+4	-7	+8	+1			-	1		
+4	-6	+4	-1	-	1	+	1		
+4	-6	+4	0			-	1		
+4	-6	+4	+1					+	1
+4	-6	+5	0	+	10	-	10	+	1
+4	-6	+6	0	-	15	+	14		
+4	-6	+7	0	+	4	-	4		
+4	-6	+7	+1	-	1	+	1		
+4	-6	+8	0	-	1	+	1		
+4	-6	+8	+1	+	1	-	1		
+4	-5	+2	-1			-	1		

Arguements				Coefficients du sinus					
$\bar{l}$	l'	l	l''	l		ω		2Ω	
+4	-5	+3	-1	+ 2		- 2			
+4	-5	+3	0	- 1		+ 1			
+4	-5	+4	-1			+ 1			
+4	-5	+4	0	+ 1		- 4		- 1	1
+4	-5	+5	0	+ 31		- 28		+ 2	2
+4	-5	+6	0	- 9		+ 9			
+4	-5	+7	0	+ 3		- 3			
+4	-5	+7	+1	- 3		+ 3			
+4	-5	+8	0			+ 1			
+4	-5	+8	+1			- 1			
+4	-4	+1	0			+ 1			
+4	-4	+2	-1			- 1			
+4	-4	+2	0	+ 2		- 2			
+4	-4	+3	0	- 8		+ 8			
+4	-4	+4	0	+ 6		- 16		- 5	5
+4	-4	+5	0	- 2		+ 2			
+4	-4	+5	+1			- 1			
+4	-4	+6	0			- 1			
+4	-4	+6	+1			+ 1			
+4	-3	0	0			- 1			
+4	-3	+1	-1	- 2		+ 2			
+4	-3	+1	0	- 3		+ 3			
+4	-3	+2	0	+ 9		- 9			
+4	-3	+3	0	- 29		+ 27		- 1	1
+4	-3	+4	+1			+ 1			
+4	-3	+5	-1					- 1	1
+4	-3	+5	+1	+ 2		- 2			
+4	-2	0	0			+ 1			
+4	-2	+1	0	+ 2		- 2			
+4	-2	+2	0	- 7		+ 7			
+4	-2	+3	0	- 1		+ 1			
+4	-2	+4	-1					+ 3	3
+4	-1	+3	-1					+ 1	1
+5	-9	+7	0			+ 1			
+5	-9	+8	0			- 1			
+5	-9	+9	0			+ 1			
+5	-8	+6	0			- 1			
+5	-8	+7	0	- 3		+ 2			
+5	-8	+8	0	+ 2		- 2			
+5	-8	+9	0			+ 1			
+5	-7	+6	0	+ 4		- 4			
+5	-7	+7	0	- 6		+ 6			
+5	-7	+8	0	+ 2		- 2			
+5	-7	+8	+1			+ 1			
+5	-7	+9	0			+ 1			
+5	-7	+9	+1			- 1			
+5	-6	+3	-1			- 1			
+5	-6	+4	-1			- 1			
+5	-6	+4	0			+ 1			

THÉORIE PLANÉTAIRE SEMI-NUMÉRIQUE SANS TERMES SÉCULAIRES

Arguments				Coefficients du sinus					
$\bar{l}$	l'	φ	ψ	l	$\bar{\omega}$	2Ω			
+5	-6	+5	0	+	1	-	3	-	1
+5	-6	+6	0	+	11	-	10	+	1
+5	-6	+7	0	-	3	+	3		
+5	-6	+8	0			-	1		
+5	-6	+8	+1	-	1	+	1		
+5	-5	+3	-1			-	1		
+5	-5	+3	0	+	1	-	1		
+5	-5	+4	0	-	4	+	4		
+5	-5	+5	0	+	5	-	8	-	2
+5	-5	+6	0	-	1	+	1		
+5	-5	+6	+1			-	1		
+5	-5	+7	+1			+	1		
+5	-4	+2	-1			+	1		
+5	-4	+2	0			+	1		
+5	-4	+3	0	+	3	-	3		
+5	-4	+4	0	-	12	+	11		
+5	-4	+6	-1					-	1
+5	-4	+6	+1	+	1	-	1		
+5	-3	+2	0	+	1	-	1		
+5	-3	+3	0	-	4	+	4		
+5	-3	+4	0			+	1		
+5	-3	+5	-1					+	1
+5	-2	+2	0			+	1		
+6	-9	+8	0	-	1	+	1		
+6	-9	+9	0			-	1		
+6	-8	+7	0	+	2	-	2		
+6	-8	+8	0	-	3	+	3		
+6	-8	+9	0			-	1		
+6	-7	+5	0			+	1		
+6	-7	+6	0	+	1	-	2		
+6	-7	+7	0	+	4	-	3		
+6	-7	+8	0	-	1	+	1		
+6	-7	+9	+1			+	1		
+6	-6	+4	0			-	1		
+6	-6	+5	0	-	2	+	2		
+6	-6	+6	0	+	3	-	4	-	1
+6	-6	+7	0			+	1		
+6	-5	+4	0	+	1	-	1		
+6	-5	+5	0	-	5	+	4		
+6	-5	+7	+1			-	1		
+6	-4	+3	0			-	1		
+6	-4	+4	0	-	2	+	2		
+6	-4	+6	-1	-	2			+	1
+7	-9	+8	0			-	1		
+7	-9	+9	0	-	1	+	1		
+7	-8	+7	0			-	1		
+7	-8	+8	0	+	1	-	1		
+7	-7	+6	0			+	1		
+7	-7	+7	0	+	2	-	2		

Arguments				Coefficients du sinus		
$\bar{l}$	l'	φ	η	l	m	2Ω
+7	-6	+6	0	- 2	+ 2	
+7	-5	+5	0	- 1	+ 1	
+8	-8	+8	0		- 1	
+8	-7	+7	0		+ 1	
+8	-6	+6	0		+ 1	

THÉORIE PLANÉTAIRE SÉMI-NUMÉRIQUE SANS TERMES SÉCULAIRES

Arguments				Coefficients du cosinus		
$\bar{l}$	l'	l''	q	a	e	-2
0	0	0	+2		+0,000008	
0	0	+1	-1		-0,000187	+0,000012
0	0	+1	0		+0,027667	
0	0	+2	-1		-0,000887	+0,000038
0	0	+2	0		-0,002164	
0	0	+3	-1		+0,000138	
0	0	+3	0		+0,000341	
0	0	+3	+1		-0,000342	
0	0	+4	-1		-0,000033	
0	0	+4	0		-0,000058	
0	0	+4	+1		+0,000095	
0	0	+5	-1		+0,000008	
0	0	+5	0		+0,000009	
0	0	+5	+1		-0,000026	
0	+1	-3	0		-0,000005	
0	+1	-2	0		+0,000021	
0	+1	-1	0		-0,000145	
0	+1	0	0		-0,000024	
0	+2	-3	0		-0,000009	
0	+2	-2	0		+0,000054	
0	+2	-1	0		+0,000015	
+1	-4	+2	0		-0,000006	
+1	-4	+3	0	-0,000006	+0,000026	
+1	-4	+4	0		-0,000022	
+1	-3	0	0		-0,000006	
+1	-3	+1	-1	+0,000005	-0,000019	
+1	-3	+1	0	-0,000035	+0,000062	
+1	-3	+1	+1	+0,000015	+0,000006	-0,000004
+1	-3	+2	-1		+0,000006	
+1	-3	+2	0	-0,000139	+0,000271	
+1	-3	+3	0	+0,000086	-0,000468	
+1	-3	+4	0		+0,000077	
+1	-3	+4	+1		-0,000009	
+1	-3	+5	0		-0,000019	
+1	-3	+5	+1		+0,000011	
+1	-2	-1	-1		+0,000005	
+1	-2	0	-1	-0,000008	+0,000014	
+1	-2	0	0		-0,000009	
+1	-2	+1	0	-0,000040	+0,000092	
+1	-2	+2	0	-0,000232	+0,000565	
+1	-2	+3	0		-0,000085	
+1	-2	+4	0		+0,000021	
+1	-2	+4	+1		-0,000016	
+1	-2	+5	0		-0,000006	
+1	-1	0	0		-0,000007	
+1	-1	+1	0	+0,000118		
+1	-1	+2	0		-0,000005	
+1	0	-1	0		+0,000009	
+1	0	0	0	-0,000023	-0,000055	

Arguments				Coefficients du cosinus		
$\bar{l}$	l'	r	q	a	e	r^2
+1	0	+1	0		-0,000009	
+2	-6	+5	0		+0,000007	
+2	-5	+4	0	+0,000005	-0,000013	
+2	-5	+5	0		+0,000010	
+2	-4	+2	0	+0,000010		
+2	-4	+3	0	-0,000023	+0,000023	
+2	-4	+4	0	+0,000014	-0,000038	
+2	-4	+5	0		+0,000006	
+2	-3	+1	-1	-0,000005		
+2	-3	+2	0	+0,000081	+0,000017	
+2	-3	+3	0	-0,000092	+0,000113	
+2	-3	+4	0		-0,000016	
+2	-3	+5	+1		-0,000005	
+2	-2	0	-1	+0,000019		
+2	-2	+1	0	-0,000006		
+2	-2	+2	0	+0,000486	-0,000005	
+2	-2	+4	+1	-0,000019		
+2	-1	+1	0	-0,000005	-0,000006	
+2	-1	+2	0	-0,000009		
+3	-5	+3	0	+0,000005		
+3	-5	+4	0	-0,000012	+0,000008	
+3	-5	+5	0	+0,000007	-0,000013	
+3	-4	+3	0	+0,000039	+0,000005	
+3	-4	+4	0	-0,000043	+0,000035	
+3	-3	+1	-1	+0,000011		
+3	-3	+3	0	+0,000180		
+3	-3	+5	+1	-0,000011		
+3	-2	+2	0	+0,000032	+0,000026	
+4	-6	+5	0	-0,000007		
+4	-6	+6	0		-0,000005	
+4	-5	+4	0	+0,000019		
+4	-5	+5	0	-0,000021	+0,000013	
+4	-4	+2	-1	+0,000005		
+4	-4	+4	0	+0,000069		
+4	-4	+6	+1	-0,000006		
+4	-3	+3	0	+0,000019	+0,000012	
+5	-6	+5	0	+0,000009		
+5	-6	+6	0	-0,000010		
+5	-5	+5	0	+0,000027		
+5	-4	+4	0	+0,000010		
+6	-6	+6	0	+0,000010		

CHAPITRE V – GÉNÉRALISATION DE LA MÉTHODE

1 - TERMES DU SECOND ORDRE DANS LA THEORIE DE VESTA ET DE JUPITER.

La masse de Vesta étant négligeable il n'existe pas de termes du second ordre proportionnels au produit des masses des deux planètes. Les seuls termes à envisager sont d'une part les termes en m'^2 , d'autre part les termes en $m'm''$, m'' étant la masse d'une planète autre que Vesta et Jupiter et qui perturbe Jupiter.

Les termes en m'^2 se calculeraient sans qu'il soit nécessaire de prendre un autre système d'axes que celui que nous avons choisi ; il suffirait de faire les calculs du chapitre 4 en double précision puis de reporter la solution dans les seconds membres, d'intégrer puis de recommencer jusqu'à ce que les coefficients convergent à une certaine précision près correspondant au second ordre en m' . Les calculs nécessitant un programme de multiplication de séries trigonométriques à quatre arguments en double précision sur ordinateur seraient certes très longs mais néanmoins possibles sur la Gamma 30 S à disques à haute performance. On aurait ainsi les principaux des termes du second ordre car les termes en $m'm''$ seraient trois fois et demi plus petits environ puisque la valeur la plus grande de m'' est la masse de Saturne qui vaut environ $m'/3,5$.

Pour avoir les termes en $m'm''$ il faudrait avoir un système d'axes différent puisque maintenant l'orbite de Jupiter n'est plus considérée comme képlérienne. On prendrait par exemple le plan de l'écliptique comme plan xoy , ox passant par le point vernal. Les quantités a' , e' , i' , ω' , Ω' , seraient des fonctions du temps lentement variables.

La variable ω' peut être introduite dans le système utilisé dans le présent travail, il suffit que l'axe ox ne passe plus par le périhélie de Jupiter mais par un point fixe, la variable h définie au chapitre 1 serait remplacée par $h - \omega'$.

Exprimée dans nos unités la partie proportionnelle au temps de ω' ($\omega't$ où t est en jours) serait telle que :

$$\omega' = 0,139437 \cdot n_0 \alpha m'$$

Il faudrait diminuer d'autant la partie séculaire de ϕ sous les signes sinus et cosinus des seconds membres des équations, d'où, en intégrant des valeurs des coefficients différentes de celles que nous avons trouvées en prenant ω' constant.

Dans le cas général où l'on considérerait les variations du premier ordre de tous les éléments de Jupiter la méthode suivie en serait pas changée dans son principe, on aurait simplement des fonctions linéaires du temps connues sous les signes sinus et cosinus des seconds membres des équations du mouvement provenant du mouvement du nœud et du périhélie de Jupiter. En revanche il faudra prendre garde à ne pas faire apparaître de termes séculaires dans e' et i' car ces quantités figurent dans les coefficients de la fonction perturbatrice de Vesta et conduiraient à des termes mixtes. Pour ce faire il faudrait que les éléments de l'orbite de Jupiter utilisée aient été obtenus par une méthode analogue à la nôtre. On voit que ceci conduit à refaire une théorie générale du système solaire. On commencerait par faire la théorie de Jupiter et de Saturne en suivant la méthode employée ici si bien que leurs éléments métriques n'auraient pas d'inégalités séculaires. Il en résulte que les perturbations de ces deux planètes sur une autre ne donneraient que des inégalités périodiques si l'on s'astreint à suivre toujours la même méthode.

Nous avons déjà évoqué le problème des inégalités du second ordre au chapitre 2 et signalé en particulier que certains termes à longue période du premier ordre proviennent de termes qui seraient des termes séculaires du second ordre. Nous avons dit aussi que ces termes avaient été trouvés par Perrotin et qu'ils sont trop faibles pour être adjoints à la présente théorie. En revanche certains des termes à courte période du second ordre ont des coefficients importants ; Perrotin signale un coefficient de $50''$ dans la longitude moyenne de Vesta provenant des perturbations de Jupiter par Saturne. Ceci montre bien que notre théorie n'est qu'une illustration de la méthode nouvelle introduite et qu'elle devrait être poussée plus à fond pour représenter correctement le mouvement de Vesta.

2 - THEORIE DE VESTA PERTURBEE PAR PLUSIEURS PLANETES.

On prendra le plan de l'écliptique comme plan de référence et on passant par le point vernal. a, e, i , etc., étant les éléments osculateurs de Vesta a', e', i' , etc... seront les éléments de Jupiter, a'', e'', i'' , etc., ceux d'une planète quelconque.

La fonction perturbatrice est la somme des fonctions perturbatrices dues à chacune des planètes troublantes. Pour chaque couple formé de Vesta et d'une planète la "partie séculaire" de la fonction perturbatrice peut être développée en série trigonométrique de deux arguments angulaires, les coefficients étant fonctions des éléments métriques. Chacune des séries en question étant une série en cosinus aura un terme ne dépendant que des éléments métriques. On intégrera le système d'équations simplifiées réduites aux équations en e, i, ϖ et Ω en ne considérant tout d'abord dans la fonction perturbatrice que cette somme de termes dépendant des éléments métriques. On introduira ainsi dès le départ les mouvements séculaires du nœud et du périhélie de Vesta et l'on pourra procéder ensuite comme il a été fait ici. Bien entendu les calculs seront plus compliqués puisqu'il faudra introduire un nombre d'arguments d'autant plus grand qu'il y a de planètes perturbatrices ; le traitement des séries trigonométriques rencontrées deviendra très lourd mais cependant praticable sur un ordinateur comme le Gamma 30 S à disques à haute performance.

3 - THEORIE COMPLETEMENT ANALYTIQUE.

On pourrait enfin essayer d'obtenir une solution purement analytique du problème en conservant dans les coefficients des séries trigonométriques, les excentricités et les inclinaisons sous forme littérale. Comme ces coefficients sont des développements en e, i, e', i' considérés comme des infiniment petits, il suffirait dans les produits deux à deux des termes des séries d'obtenir les coefficients des termes formés sous la même forme. La gestion de tels programmes pour ordinateur est sans doute très laborieuse, elle est cependant à l'étude au Bureau des Longitudes pour des théories de type lunaire par la méthode de Delaunay et nous envisageons sérieusement de l'adapter aux théories planétaires.

CONCLUSION

Nous avons montré la possibilité pratique de mettre sous forme de termes périodiques seulement les inégalités des éléments des planètes.

Il nous faut cependant attirer l'attention sur une remarque que nous nous sommes faite nous-même sur l'utilité de la solution trouvée ici. Les théories anciennes, valables pour quelques siècles, disposaient pour le calcul des constantes d'intégration, d'un matériel d'observations à peu près identique à celui dont nous disposons maintenant. Comment dans ces conditions tirer de ces observations les constantes nécessaires pour une théorie valable pendant un temps très long ?

La première réponse à cette question est que de toute manière les observations accumulées jusqu'ici permettent certainement d'assurer la validité de théories s'étendant sur des temps beaucoup plus longs que ceux qui étaient permis jusqu'à présent.

D'autre part, les observations se multiplieront, peut-être même seront-elles faites dans l'avenir par des méthodes beaucoup plus précises. Il est bon dans ce cas d'avoir déjà éprouvé la théorie qui permettra de retirer tous les avantages de ces progrès.

Monsieur Jean Kovalevsky, astronome titulaire au Bureau des Longitudes, a guidé ma formation de chercheur depuis six ans. Il m'a proposé le sujet du présent travail et en a grandement facilité l'achèvement par ses conseils et ses encouragements. Je tiens à le remercier vivement de son amitié et de son dévouement.

Le mérite d'une rencontre aussi fructueuse revient à Monsieur Danjon, directeur honoraire de l'Observatoire de Paris, dont la bienveillante sollicitude n'a jamais cessé pendant mes années de recherches. Monsieur Thiry, professeur à la faculté des sciences de Paris, m'a fait bénéficier de la clarté et de la profondeur de son enseignement à la Sorbonne. Qu'ils trouvent ici l'assurance de ma respectueuse reconnaissance.

Enfin je ne saurais trop insister sur les conditions de travail dont j'ai eu la chance de profiter au Service de Calcul du Bureau des Longitudes. Les jeunes chercheurs par leurs conversations enrichissantes, les calculateurs et les programmeurs, sous la direction de Monsieur Catoire, par leur aide précieuse dans la mise au point des programmes contribuent tous à créer cette atmosphère intellectuelle et morale qui m'a été si précieuse.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. POINCARÉ - "Les méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste". Gauthier-Villars.
- [2] F. TISSERAND - "Traité de mécanique céleste" 4 tomes. Gauthier-Villars.
- [3] J. PERROTIN - "Théorie de Vesta" Annales de l'Observatoire de Toulouse Tome I - 1880.
- [4] G. LEVEAU - "Théorie du mouvement de Vesta" Annales de l'Observatoire de Paris - Tome XV - 1880.

- [5] HERGETT - Astronomical papers of the american ephemeris - Vol. XI.
- [6] J. KOVALEVSKY - "Introduction à la mécanique céleste" Armand Colin.
- [7] U. J. J. LE VERRIER - Recherches astronomiques. Annales de l'Observatoire de Paris - Tome I et X.
- [8] BROUWER and CLEMENCE - "Introduction to celestial mechanics" Academic Press 1961.
- [9] F. TISSERAND - "Mémoire sur le problème des trois corps" Annales de l'Observatoire de Paris - Tome XVIII.
- [10] S. NEWCOMB - "On the general integrals of planetary motions" Smithsonian Contributions to knowledge Tome XXI - 1876.
- [11] BROWN and SHOOK - "Planetary theory". Cambridge University Press 1933.
- [12] J. KOVALEVSKY - "Méthode numérique de calcul de perturbations générales appliquées au VIIIe satellite de Jupiter" Bull. Astr. 2ème série Tome XXIII fas. 1.
- [13] D. BROUWER - "The motions of the outer planets" Monthly Notices of the Royal Astronomical Society - 1955 Vol. 115 p. 228.
- [14] S. FERRAZ-MELLO - Note sur la méthode de Von Zeipel Mem. S. A. It. 37, 227, 1966.

Manuscrit reçu le 15 septembre 1966

DEUXIEME THESE

Propositions données par la Faculté

"LES INVARIANTS INTEGRAUX. APPLICATION A LA MECANIQUE CELESTE".

Vu et approuvé :

Paris, le 12 décembre 1966

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

Marc. ZAMANSKY

Vu

et Permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie

de Paris,

Jean ROCHE

